પાઠ્યપુસ્તકઃ—૨

ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વો

ભાગ ૩-૪

પ્રકાશક

ર એજ્યુકેશન સોસાયટી,

આણંદ



યુક્લિડ

મહાન ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી

ઇ. સ. પૂ. ૩૦૦

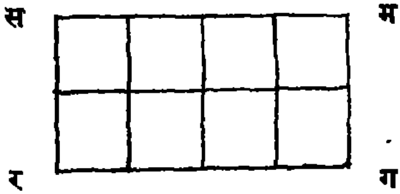
ચરોતર પ્રિન્ટિંગ પ્રેસ–આણંદ.

ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વો
ભાગ ૩

ક્ષેત્રફળ.

આપણે આપણા વ્યવહારમાં કહીએ છીએ કે આકૃતિ નં. ૧ આકૃતિ નં. ૨ થી નાની છે. આજ બાબત આપણે ભૂમિતિની શાસ્ત્રીય ભાષામાં દર્શાવવી હોય તો આપણે કહીએ છીએ કે આકૃતિ નં. ૧ નું ક્ષેત્રફળ આકૃતિ નં. ૨ થી ઓછું છે.





આ. ૧ આ. ૨

વ્યાખ્યા: કોઇપણ આકૃતિમાં જેટલી જગાનો સમાવેશ થાય તેટલી જગાને તે આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ કહે છે.

એક ઇંચ લાંબી ભુજા ઉપર દોરવામાં આવેલા ચોરસને એક ચોરસ ઇંચ અને એક સેન્ટિમિટર લાંબી ભુજા ઉપર દોરેલા ચોરસને એક ચોરસ સેન્ટિમિટર કહેવામાં આવે છે. આ જ પ્રમાણે ચો. યાર્ડ, ચો. ફુટ, ચો. મિટર, ચો. હાથ, ચો. ગજ, ચો. તસુ, ચો. વેંત વગેરે માટે સમજવું.

ઉપરની આકૃતિ નં. ૨ માં દરેક ચોરસ એક ચોરસ સેન્ટિમિ-ટર છે. બધા મળી આકૃતિમાં ૮ ચો. સેમિ. છે માટે તે આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ ૮ ચો. સેમિ. છે એમ કહેવાય છે.

પૃષ્ઠ ૯૭, આ. ૨ માં દરેક હારમાં ચાર ચેારસ છે અને એવી બે હારેા છે, માટે આખા લંબચેારસનું ક્ષેત્રફળ = ૪ × ૨ અથવા ૮ ચેા. સેમિ. છે. આ દરેક લંબચેારસને લાગુ પડે છે અને તેથી લંબચેારસનું ક્ષેત્રફળ કહાડવાને નીચેનેા નિયમ નીકળે છે:—

લંબચેારસનું ક્ષેત્રફળ = લંબાઈ × ઉંચાઇ.

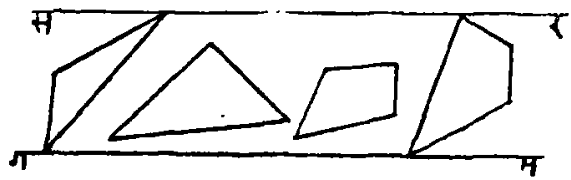
લંબચેારસ ગમે તે બે પાસેની ભુજાઓનેા બનેલેા છે એમ કહેવાય છે. પૃષ્ઠ ૯૭, આ. ૨ માં લંબચેારસ **सर** અને **सम** નેા બનેલેા છે એમ કહેવાય છે અને તેનું ક્ષેત્રફળ **सर. सम** લખાય છે.

વ્યાખ્યા: સરખા ક્ષેત્રફળ વાળી આકૃતિઓને **સમાન આકૃતિઓ** કહે છે.

એકરૂપ આકૃતિઓનું ક્ષેત્રફળ સરખું હેાય છે પણ સરખા ક્ષેત્રફળ વાળી આકૃતિઓ એકરૂપ નથી.

વ્યાખ્યા: સમાન્તર ભુજચતુષ્કેાણના પાયાની સામેની ભુજામાં કેાઇ બિંદુ લઇ તેમાંથી પાયા સુધી દેારેલા લંબને તેની ઉંચાઇ કહે છે.

સૂચના: નીચેની આકૃતિઓ એક જ સમાન્તર સુરેખાઓ **सर** અને **गम** વચ્ચે આવેલી છે એમ ભૂમિતિની ભાષામાં કહેવાનું નથી.



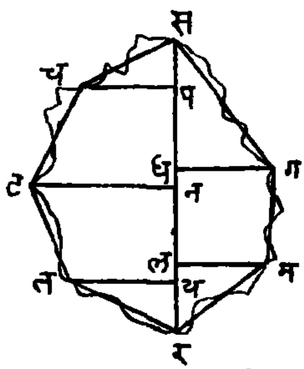
ક્ષેત્રફળ નીચેની ત્રણ રીતે કહાડી શકાયઃ—

૧. આકૃતિને બને તેટલા ત્રિકોણોમાં ભાગી દરેક ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કહાડી તેનો સરવાળો કરવો.

૨. આપેલી આકૃતિને ત્રિકોણમાં ફેરવી તેનું ક્ષેત્રફળ કહાડવું.

૩. જમીન માપવાની પ્રચલિત પદ્ધતિ.

જે જમીન માપવાની હોય તેની વાંકીચુંકી હદની રેખાઓ એવી રીતે દોરવી કે જેથી ક્ષેત્રફળમાં અગત્યનો વધારો ઘટાડો થયા સિવાય હદની બધી બાજુઓ સીધી બને. પછી તેનો લાંબામાં લાંબો વિકર્ણ દોરવો, એટલે નીચેની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે કાટખુણ ત્રિકોણ, સમલંબચતુષ્કોણ અને લંબચોરસ કે જેનું ક્ષેત્રફળ સહેલાઇથી કહાડી શકાય તેવા તેના ભાગ થશે. આ દરેકનું ક્ષેત્રફળ કહાડી તેનો સરવાળો કરવો.



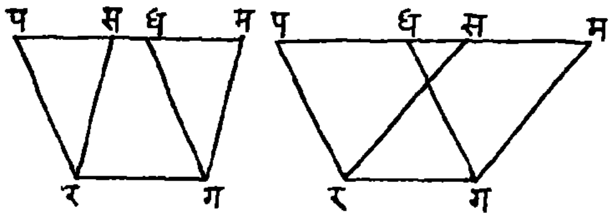
કોઇ પણ આકૃતિના ક્ષેત્રફળનો આધાર તેની પરિમિતિ ઉપર નથી. ઉદાહરણ તરીકે એક લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ એક ચો ફુટ હોય અને જો તેની ઉંચાઇ ૧૨", ૬", $\frac{૧}{૧૦}$", $\frac{૧}{૪૪૦}$" હોય તો પરિમિતિ અનુક્રમે ૪૮," ૬૦", ૨૮૮૦" અને ૧૨૬૭૨૦" અથવા બે માઇલ થાય.

જુના વખતમાં અજ્ઞાન લોકોને છેતરીને તેમની પાસેથી પરિમિતિ પ્રમાણે ખેતરો માપી જમીન પડાવી લેવામાં આવતી. લાંબી પરિમિતિવાળો ટુકડો બતાવી તેની કિંમત પરિમિતિ પ્રમાણે ઠરાવી વધારે પહોળાઇના ટુકડાની કિંમત પણ તે પરિમિતિના પ્રમાણમાં જ આપવામાં આવતી. પોતાના નાના ટુકડાના ઘેરાવા જેટલા ઘેરાવા વાળો પણ વધારે પહોળાઇનો ટુકડો લઇ બીચારા અજ્ઞાન લોકોને છેતરવામાં આવતા. ઉપરના ઉદાહરણમાં એક ચોરસ ફુટ જમીનમાં એટલો બધો તફાવત પડે છે, તો મોટા ટુકડામાં તો કેટલો બધો તફાવત પડે! હજુ પણ આપણને ઘણા મુસાફરો કોઇપણ સરોવર, ગામ, પર્વત વગેરેની મોટાઇનો દાખલો આપી અમુક અમુકથી મોટું છે એમ કહે છે. પણ ઘેરાવા ઉપર ક્ષેત્રફળનો આધાર નથી.

સરખી પરિમિતિ અને સરખી સંખ્યાની ભુજાઓની આકૃતિઓમાં જે આકૃતિની ભુજાઓ અને કોણો સરખા હોય તેનું ક્ષેત્રફળ વધારે છે. સરખી પરિમિતિવાળી આકૃતિઓમાં વર્તુલનું ક્ષેત્રફળ સૌથી વધારે છે.

સિદ્ધાન્ત ૨૧

સમાન્તર ચતુષ્કોણો જો એક અથવા સરખા પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તર સુરેખાઓ વચ્ચે આવેલા હોય, તો તે સમાન છે.



પક્ષ : सरगम, परगध ‖ કોણો रग પાયા ઉપર અને रग અને पम એક જ સમાન્તરો વચ્ચે આવેલા છે.

સાધ્ય : ‖ કોણ सरगम = ‖ કોણ परगध.

સાબીતી : △ परस અને △ धगम માં

∠ रसप = સંગત ∠ गमध ∵ सर ‖ गम

∠ रपस = સંગત ∠ गधम ∵ पर ‖ गध

पर = धग ∵ ‖ કોણની સામેની ભુજાઓ.

∴ △ परस ≅ △ धगम

હવે परगम − △ परस = ‖ કોણ सरगम

અને परगम − △ धगम = ‖ કોણ परगध

∴ ‖ કોણ सरगम = ‖ કોણ परगध.

ઉપસિદ્ધાન્ત:

૧. સરખા પાયા ઉપર આવેલા અને સરખી ઉંચાઇના સમાન્તર ચતુષ્કોણો સરખા છે. (કારણ કે તેમને એકજ પાયા ઉપર અને એક જ સમાન્તરો વચ્ચે આવી રહે તેવી રીતે મૂકી શકાય).

૨. ‖ કોણનું ક્ષેત્રફળ = પાયો × ઉંચાઇ. (કારણ કે ‖ કોણ અને લંબચોરસ એકજ પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તરો વચ્ચે આવેલા હોય તો તે સમાન છે અને લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ = પાયો × ઉંચાઇ છે.)

૩. સરખા ‖ કોણો સરખા પાયા ઉપર આવેલા હોય તો તે સરખી ઉંચાઇના છે. સરખા ‖ કોણો સરખી ઉંચાઇના હોય તો તે સરખા પાયા ઉપર છે.

મનોયત્ન ૨૧

૧. ૧૨ સેમિ. નો પાયો અને ૧૦ સેમિ. ની ઉંચાઇ વાળો એક લંબચોરસ દોરો. તેજ પાયા ઉપર તેટલાજ ક્ષેત્રફળ વાળો એક એવો ‖ કોણ દોરો કે જેનો એક કોણ ૬૦° નો હોય. મોટા વિકર્ણની લંબાઇ માપો.

૨. ૪" નો પાયો અને ૩" ની ઉંચાઇ વાળો એક લંબચોરસ દોરો. તેજ પાયા ઉપર સરખા ક્ષેત્રફળ વાળો ‖ કોણ એવો બનાવો કે જેની ભુજાઓની એક જોડ ૫" હોય. ‖ કોણના કોણો માપો.

૩. એક || કોણની ભુજાઓ ૮·૩ સેમિ. અને ૧૨·૪ સેમિ. અને કોણ ૧૨° છે. તેને સરખા ક્ષેત્રફળ વાળા ૮·૩ સેમિ. લાંબી ભુજાઓ વાળા સમચતુષ્કોણમાં ફેરવો અને તેના કોણ માપો.

૪. ૯ અને ૮ સેમિ. ની ભુજાઓ અને ૨૦°ના કોણ વાળા સમાન્તરકોણને ૬ સેમિ. ભુજા વાળા સમાન સમચતુષ્કોણમાં ફેરવો. તેના કોણ માપો.

૫. ચોરસ અને સમચતુષ્કોણ એકજ પાયા ઉપર આવેલા હોય તો ચોરસનું ક્ષેત્રફળ વધારે થાય.

૬. નીચેના માપના || કોણો દોરોઃ—

(ક) ક્ષેત્રફળ = ૨૪ ચો. સેમિ. પાયો = ૬ સેમિ.; ∠ = ૭૫°. બાકીની ભુજાઓ માપો.

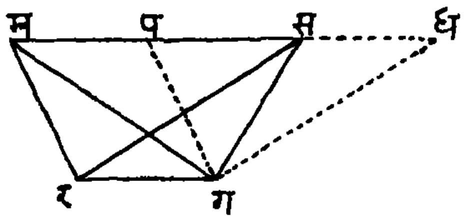
(ખ) ક્ષેત્રફળ = ૧૨" ચો.; ભુજાઓ = ૪" અને ૩·૫". ગુરુ કોણ માપો.

(ગ) ક્ષેત્રફળ = ૧૫" ચો.; પાયો = ૫"; કર્ણ = ૪". ગુરુ કોણ માપો.

(ઘ) સમચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = ૨૪ ચો. સેમિ.; ભુજા = ૫ સેમિ. લઘુ કોણ માપો.

સિદ્ધાન્ત ૨૨

એકજ પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તરો વચ્ચે આવેલા ત્રિકોણો સમાન છે.



પક્ષ : △ सरग અને △ मरग એકજ પાયા रग ઉપર અને એકજ સમાન્તરો रग અને मस વચ્ચે આવેલા છે.

સાધ્ય : △ सरग = △ मरग

રચના : गध અને गप અનુક્રમે रस અને रम ને સમાન્તર દોરીને આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે सरगध અને मरगप ‖ કોણો પૂરા કરો.

સાબીતી : △ सरग = $\frac{1}{2}$ ‖ કોણ सरगध.
△ मरग = $\frac{1}{2}$ ‖ કોણ मरगप.
પણ ‖ કોણ सरगध = ‖ કોણ मरगप. ∵ એકજ પાયા ઉપર અને ‖ રેખાઓ વચ્ચે.
∴ △ सरग = △ मरग

ઉપસિદ્ધાન્ત :

૧. સરખા પાયા અને સરખી ઉંચાઇ વાળા ત્રિકોણો સમાન છે.
૨. ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$ પાયો × ઉંચાઇ.

૩. સમાન ત્રિકોણો એકજ સુરેખાની એકજ બાજુએ એક કે સરખા પાયાઓ ઉપર આવેલા હોય તો તે એકજ સમાન્તરો વચ્ચે છે.

૪. સરખા ત્રિકોણો એક કે સરખા પાયા ઉપર આવેલા હોય તો તેમની ઉંચાઇ સરખી છે. સરખા ત્રિકોણોની ઉંચાઇ સરખી હોય તો તેઓ એક કે સરખા પાયા ઉપર આવેલા છે.

મનોયત્ન ૨૩

૧. સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ બે સમાન્તર ભુજાઓનો અર્ધો સરવાળો અને સમાન્તર ભુજાઓ વચ્ચેની ઉંચાઇના ગુણાકાર જેટલું છે.

૨. નીચેના માપનો **सरगम** સમલંબ ચતુષ્કોણ દોરો અને તેનું ક્ષેત્રફળ કહાડો:—

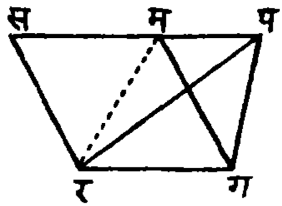
सर = ૩ સેમિ.; **सम** = ૫.૨ સેમિ.; **मग** = ૭ સેમિ.; ∠ **समग** = ૬૦°

૩. △ **सरग** ની **सर** અને **सग** ભુજાઓના મધ્ય બિંદુઓ અનુક્રમે **ट** અને **त** હોય; તો સાબીત કરો: **टत** ∥ **रग**.

૪ **पमस** અને **रमल** બે રેખાઓ પરસ્પર **म** આગળ છેદે અને △ **पमल** = △ **रमस** હોય, તો **पर** ∥ **लस**.

૫. △ **सरग** ની **सर** અને **सग** ભુજાઓ ઉપર અનુક્રમે **ट** અને **त** બિંદુઓ એવાં હોય કે △ **सतर** = △ **सटग** થાય, તો **टत** ∥ **रग** છે એમ સાબીત કરો.

ત્રિકોણ અને સમાન્તર ચતુષ્કોણ જો એકજ પાયા ઉપર અને એક જ સમાન્તરો વચ્ચે આવેલા હોય તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ સમાન્તર ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળથી અર્ધું થાય.



પક્ષ : ∠ परग અને ∥ કોણ सरगम એકજ પાયા रग ઉપર અને એકજ સમાન્તરો रग અને सप વચ્ચે આવેલા છે.

સાધ્ય : △ परग = ½ ∥ કોણ सरगम.

રચના : रम જોડો.

સાબીતી : △ परग = △ मरग ∵ सप ∥ रग

△ मरग = ½ ∥ કોણ सरगम ∵ रम વિકર્ણ

∴ △ परग = ½ કોણ सरगम.

મનોયત્ન ૨૪

૧. આપેલા ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળ જેટલો સમાન્તર ચતુષ્કોણ એવો બનાવો કે (ક) જેનો એક કોણ આપેલા કોણ બરાબર (ખ) જેની એક ભુજા આપેલી લંબાઇની હોય. આ ક્યારે અશક્ય બને ?

૨. આપેલા ∥ કોણના જેટલા ક્ષેત્રફળ વાળો એક ત્રિકોણ એવો બનાવો કે (ક) જેની એક ભુજા આપેલી લંબાઇની હોય. (ખ) જેનો એક કોણ આપેલા કોણ જેટલો હોય. આ ક્યારે અશક્ય બને ?

૩. **म** અને **ल** **सरगम** ‖ કોણની **सम** અને **रग** ભુજાઓનાં મધ્યબિંદુઓ છે. **प** એ **मल** ઉપર ગમે તે એક બિંદુ છે. સાબીત કરોઃ △ **सपर** = $\frac{1}{4}$ ‖ કોણ **सरगम.**

૪. **ल** અને **प**, **सरगम** ‖ કોણની **सर** અને **सम** ભુજાઓ ઉપર ગમે તે બે બિંદુઓ છે. સાબીત કરોઃ △**रगप** = △**गमल**

૫. **कच** અને **टत**, **कचटत** સમલંબ ચતુષ્કોણની સમાન્તર ભુજાઓ છે. **प**. **कत** નું મધ્યબિંદુ છે. સાબીત કરોઃ △ **चपट** = $\frac{1}{2}$ **कचटत**

૬. **कचटत** ॥ કોણની અંદર **प** એક બિંદુ છે. સાબીત કરોઃ– △ **पकच** + △ **पटत** = $\frac{1}{2}$ **कचटत.**

૭ સમભુજચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ તેના કર્ણોથી બનેલા અર્ધા લંબચોરસ જેટલું છે. (ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$ કર્ણોનો ગુણાકાર.)

૮. **पलर** ત્રિકોણનું **ग** એ ગુરુત્વકેન્દ્ર§ હોય તો △ **पगर** = $\frac{1}{3}$ △ **पलर.**

૯. કોઇપણ ત્રિકોણની બે ભુજાઓ આપેલી હોય તો તેનું ક્ષેત્રફળ જ્યારે તેમનાથી બનતો કોણ કાટખુણો હોય ત્યારે વધારેમાં વધારે હોય.

૧૦. કોઇપણ ત્રિકોણની બે ભુજાઓનાં મધ્યબિંદુઓ જોડવાથી જે ત્રિકોણ બને તે આખાનો $\frac{1}{4}$ ભાગ છે.

૧૧. એક જ પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તરો વચ્ચે આવેલા ત્રિકોણોમાં સમદ્વિભુજ ત્રિકોણની પરિમિતિ ઓછામાં ઓછી છે.

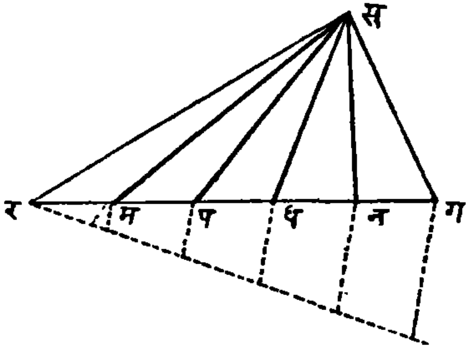
૧૨. બે સમાન ત્રિકોણો એક જ પાયા ઉપર પણ સામસામેની બાજુએ આવેલા હોય તો પાયાની રેખા અથવા પાયાની લંબાવેલી રેખા તેમનાં શિરોબિંદુઓને જોડનારી રેખાને દુભાગે છે.

---

§ ત્રિકોણની મધ્યગાઓ જે બિંદુમાં થઇને પસાર થાય તેને ગુરુત્વકેન્દ્ર વા મધ્યગાસંગમ બિંદુ કહે છે.

કૃત્ય ૧૨

કોઇ એક △ **सरग** ના કોઇ એક શિરોબિંદુ **स** માંથી સુરેખાઓ દોરી તેના ગમે તેટલા સમાન ભાગ કરવા.



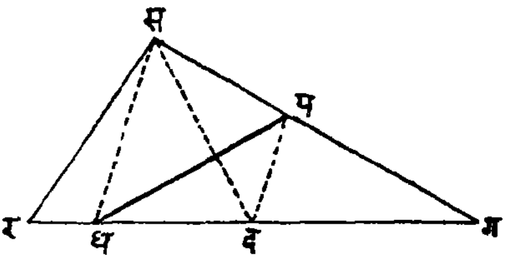
અનુકૂળતા ખાતર ધારોકે △ **सरग** ના પાંચ સમાન ભાગ કરવા છે.

રચના : **स** ની સામેની ભુજા **रग**ના **म, प, ध, न** બિંદુઓથી આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે પાંચ સરખા ભાગ કરો. **सम, सप, सध, सन** જોડો. એટલે ત્રિકોણના પાંચ સમાન ભાગ થશે.

સાબીતી : **रम = मप = पध = धन = नग** રચના
અને દરેક ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ **स** હોવાથી
તેઓ સમાન ઉંચાઇના છે.
∴ △ **सरग** = △ **समप** = △ **सपध** = △ **सधन**
= △ **सनग** = $\frac{1}{5}$ △ **सरग**

કૃત્ય ૧૩.

કોઇ એક △ सरग ની કોઇ એક रग ભુજા ઉપર આવેલા કોઇ એક ध બિંદુમાંથી સુરેખા દોરી ત્રિકોણને દુભાગવો.



રચના : सध જોડો. रग ને द આગળ દુભાગો. दप ‖ धस દોરી सग ને प માં મળવાદો. धप જોડો. એટલે धप △ सरग ને દુભાગશે.

સાબીતી : सद જોડો.

△ सरद = △ सदग   ∵ रद = दग રચના

∴ △ सरद = $\frac{1}{2}$ △ सरग.

વળી △ सधप = △ सधद ∴ दप ‖ धस રચના.

બન્નેમાં △ सरध ઉમેરો.

∴ △ सधप + △ सरध = △ सधद + △ सरध.

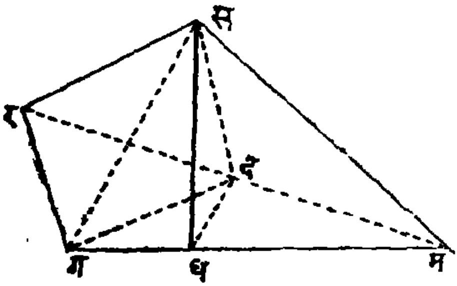
∴ सरधप = △ सरद.

= $\frac{1}{2}$ △ सरग   ∵ સાબીત કર્યું.

∴ धप. △ सरग ને દુભાગે છે.

કૃત્ય ૧૪.

કોઈ એક सरगम ચતુષ્કોણને કોઈ એક કોણના स બિંદુમાંથી સુરેખા દોરી દુભાગવો.



રચના : सग, रम જોડો. रम ने द આગળ દુભાગો. दघ ∥ सग દોરો અને गम ને घ માં મળવાદો. सघ જોડો. એટલે सघ ચતુષ્કોણને દુભાગશે.

સાબીતી : सद, गद જોડો.

△ सगघ = △ सगद ∵ दघ ∥ सग, રચના.

△ सरग બન્ને બાજુએ ઉમેરો.

∴ △ सगघ + △ सरग = △सगद + △सरग.

∴ सरगघ = सरगद.

= △ सरद + △ रगद.

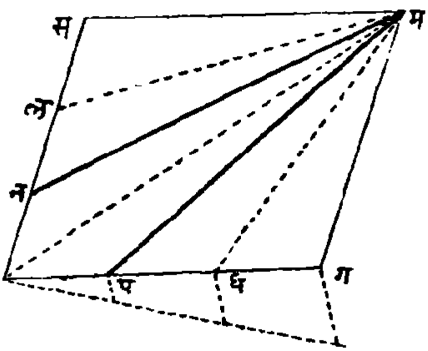
= $\frac{1}{2}$ △ सरम + $\frac{1}{2}$ △ रगम ∵ रद = दम

= $\frac{1}{2}$ सरगम. [રચના.

∴ सघ ચતુષ્કોણને દુભાગે છે.

કૃત્ય ૧૫.

કોઇ એક **સરગમ** ‖ કોણના કોઇ એક કોણના **મ** બિંદુમાંથી સુરેખાઓ દોરી તેના ગમે તેટલા સમાન ભાગ કરવા.



અનુકૂળતા ખાતર ધારો કે **સરગમ** ‖ કોણના ત્રણ સમાન ભાગ કરવા છે.

રચના : **મ** ની સામેની ભુજાઓ **સર** અને **રગ** ના **લ**, **ન** અને **પ**, **ધ**, બિંદુઓ આગળ ત્રણ સરખા ભાગ કરો. **મન**, **મપ** જોડો. એટલે ‖ કોણના ત્રણ સમાન ભાગ થશે.

સાબીતી : **મધ**, **મર**, **મલ** જોડો.

△ **મસલ** = △ **મલન** = △ **મનર** ∵ પાયો અને ઉંચાઇ સમાન.

= $\frac{1}{3}$ △ **મસર**

= $\frac{1}{6}$ ‖ કોણ **સરગમ**

તેવીજ રીતે △ **મરપ** = △ **મપધ** = △ **મધગ**

= $\frac{1}{6}$ ‖ કોણ **સરગમ**

∴ || કોણના સઘળા ત્રિકોણો સમાન છે.

$$\therefore \triangle \text{मसल} + \triangle \text{मलन} = \triangle \text{मनर} + \triangle \text{मरप}$$
$$= \triangle \text{मपध} + \triangle \text{मधग}$$
$$= \tfrac{1}{3} \text{सरगम}$$

$$\therefore \triangle \text{मसन} = \text{मनरप} = \triangle \text{मपग} = \tfrac{1}{3} \text{सरगम}$$

∴ मन અને मप || કોણના ત્રણ સમાન ભાગ કરે છે.

મનોયત્ન ૨૪

(કૃત્ય ૧૨, ૧૩, ૧૪, ૧૫)

૧. નીચેના માપનો △ सरग દોરો. म માંથી સુરેખાઓ દોરી ત્રિકોણના ત્રણ સમાન ભાગ કરો:

रग = ૪.૫"; गस = ૨.૩"; सर = ૩.૭".

૨. એક ત્રિકોણાકાર ખેતરની ત્રણ વાડો ૭૫, ૮૫, ૧૨૦ વાડની છે. તેના પહોળામાં પહોળા ખુણામાં એક કૂવો છે ચાર ભાઇઓ વચ્ચે તેને એવી રીતે વહેંચો કે જેથી દરેકને પોતાના ભાગમાં થઇને કૂવા ઉપર જવા આવવાને લગવડ મળે. તેના ભાગ કરનારી હદની વાડોની લંબાઇ અને દરેક ભાગનું ક્ષેત્રફળ કહાડો.

૩. △ सरगમાં रग = ૪.૫"; गस = ૩.૯" અને मर = ૩.૨". स થી ૨" દૂર सर ઉપર એક प બિંદુ આપેલું છે. प માંથી એક સુરેખા દોરી ત્રિકોણને દુભાગો અને દુભાજક રેખાની લંબાઇ માપો.

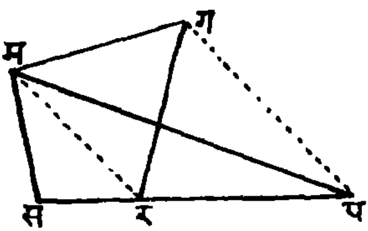
૪. એક ત્રિકોણાકાર જમીનના ટુકડાની ત્રણ વાડો ૫૦, ૬૦, ૭૫ ગજ લાંબી છે. લાંબામાં લાંબી વાડના એક ખુણાથી ૨૫ ગજ દૂર વાડ ઉપર એક કૂવો આવેલો છે. આ ટુકડો બે ભાઇ વચ્ચે એવી રીતે વહેંચો કે જેથી બન્નેને કૂવાનો ઉપયોગ કરવાને લગભગ સરખી અનુકૂળતા મળે. (માપ: ૧' = ૨૦ ગજ).

૫. નીચેના માપનો **पफबम** ચતુષ્કોણ દોરો. **प** માંથી સુરેખા દોરી તેને દુભાગો. દુભાજક રેખા માપો: **पफ** = ૬.૫ સેમિ.; **फब** = ૫.૨ સેમિ.; **बम** = ૭.૮ સેમિ.; **मप** = ૨.૯ સેમિ.; ∠ **पफब** = ૭૫°.

૬. સમાન્તર ભુજ ચતુષ્કોણાકારના એક ગભાણના ટુકડાના પાસ પાસેની વાડોની લંબાઇ ૮૫′ અને ૧૦૫′ છે. તે બેની વચ્ચેનો ખુણો ૭૦° નો છે. આ ખુણામાં એક કૂવો છે. દરેકને કૂવા ઉપર જવાઆવવાને રસ્તો રહે તેવી રીતે તેના પાંચ સમાન ભાગ કરો. ભાગ કરનારી વાડોની લંબાઇ માપો.

કૃત્ય ૧૬.

ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ જેટલા ક્ષેત્રફળ વાળો ત્રિકોણ બનાવવો.

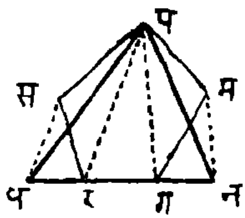


રચના : **सरगम** કોઇએક ચતુષ્કોણ દોરો. **रम** જોડો. **रम** ને સમાન્તર **गप** દોરી, **सर** ને લંબાવી તે બન્નેને **प** માં મળવાદો. **मप** જોડો એટલે **सरगम** =△ **सपम** થશે.

સાબીતી : △ **मरग** = △ **मरप** ∵ એકજ પાયો અને સમાન્તરો વચ્ચે.
△ **सरम** બન્ને બાજુએ ઉમેરો.
△ **सरम** + △ **मरग** = △ **सरम** + △ **मरप**.
∴ **सरगम** = △ **समप**.

સૂચના : આ રીતે પંચકોણ પણ સરખા ક્ષેત્રફળ વાળા ચતુષ્કોણમાં ફેરવી શકાય અને ચતુષ્કોણને ઉપર પ્રમાણે ત્રિકોણમાં ફેરવી શકાય અને ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કહાડી શકાય. આજ રીતે ગમે તેટલી ભુજાઓની આકૃતિ આપી હોય તો તેની એક એક ભુજા ઓછી કરતાં તેના જેટલા ક્ષેત્રફળ વાળો ત્રિકોણ બનાવી શકાય.

મનોયત્ન



૧. બાજુની આકૃતિમાં **पर** || **सध** અને **पग** || **मन** છે. સાબીત કરો: △ **पधन** = **सरगमप**.

૨. **सरगम** ચતુષ્કોણ સમાન એક એવો ત્રિકોણ બનાવો કે જેનો પાયો **नर** હોય અને જેનો એક કોણ ચતુષ્કોણનો ∠ **म** હોય.

૩. બે ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળના સરવાળા જેટલા ક્ષેત્રફળ વાળો એક ત્રિકોણ બનાવો.

૪. નીચેના માપનો **सरगमप** પંચકોણ દોરો. અને તેના ક્ષેત્રફળ જેટલા ક્ષેત્રફળવાળો એક ત્રિકોણ એવો બનાવો કે જેની એક ભુજા ૫ સેમિ. હોય. **सर** = ૧.૫: **रग** = ૨.૪: **गम** = **मप** = ૪: **पम** = ૨.૫ સેમિ: ∠ **स** = ૮૦°: ∠ **र** = ૧૩૩°.

પીથેગોરસ સિદ્ધાન્ત.

પ્રયોગ

૧. નીચેના માપનો એક **सरग** ત્રિકોણ દોરો અને **गस** માપો: ∠ **सरग** = ૯૦°; **सर** ૩"; **रग** = ૪". **सर**, **रग** અને **गस** ઉપર ચોરસો દોરો. દરેક ચોરસનું ક્ષેત્રફળ કહાડો. **सर** અને **रग** ઉપરના ચોરસોના ક્ષેત્રફળના સરવાળા સાથે **गस** ઉપરના ચોરસનું ક્ષેત્રફળ સરખાવો.

૨. ∠ **सरग** = ૯૦°; **सर** = ૧", **रग** = ૨.૪" માપનો એક ત્રિકોણ દોરો. ઉપરના પ્રશ્નમાં જણાવ્યા પ્રમાણે બધું કરી પરિણામ નોંધો.

૩. ૫, ૧૨, અને ૧૩ સેમિ. લંબાઇની ભુજાઓ વાળો એક ત્રિકોણ દોરો. મોટામાં મોટો કોણ માપો. મોટામાં મોટી ભુજાના વર્ગ સાથે બાકીની બે ભુજાઓના વર્ગના સરવાળાને સરખાવો. આ ઉપરથી તમે શું અનુમાન કરો છો?

ટૂંક ઇતિહાસ

ભૂમિતિના સિદ્ધાન્તોમાં આ સિદ્ધાન્ત વધારેમાં વધારે પ્રખ્યાત અને ઉપયોગી છે માટે તે સંબંધી કાંઇક ટૂંક ઇતિહાસ અને સાબીત કરવાની કેટલીક પ્રાથમિક રીતો અહીં આપી છે.

યુક્લિડનો પ્રાચીન ગ્રીક ભાષ્યકાર પ્રોક્લસ, પીથેગોરસ સિદ્ધાન્તના ઇતિહાસ સંબંધી લખે છે કે: "પ્રાચીન ઇતિહાસ જાણનાર પાસેથી આપણે સાંભળીએ છીએ કે પીથેગોરસે આ સત્ય શોધી કહાડ્યું તેના માનમાં તેણે સો આખલાનું બલિદાન આપ્યું. આ સિદ્ધાન્તનું પ્રથમ સત્ય શોધનારને હું માન આપું છું પણ ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વો" લખનાર યુક્લિડને હું વધારે માન આપું છું. કારણ કે સરળ રીતે આ સિદ્ધાન્તની સાબીતી આપવા ઉપરાન્ત તેને વધારે સામાન્ય બનાવી વિજ્ઞાનની સજ્જડ દલીલો આપી તે સત્ય ખરૂં છે તે તેણે બીજાઓ પાસે કબૂલ કરાવ્યું. છઠ્ઠા ભાગમાં

તે સાબીત કરે છે કે કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણ ઉપર દોરેલી આકૃતિ, બીજી બે ભુજાઓ ઉપર તેવી જ રીતે દોરેલી સજાતીય આકૃતિઓના સરવાળા જેટલી છે." આ ઉપરથી લાગે છે કે **પ્રોકલસ** કે જે પાંચમી સદીમાં થયો તે ધારતો કે આ સિદ્ધાન્ત **પીથેગોરસે** ઇ. પૂ. છઠ્ઠી સદીમાં શોધી કહાડયો. ઘણાંખરાં પુસ્તકોમાં આની જે સાબીતી આપવામાં આવે છે તે યુકિલડને આભારી છે અને આ સિદ્ધાન્તને વધારે સામાન્ય બનાવવાનું માન પણ યુકિલડને જ ઘટે છે. આ સિદ્ધાન્ત ગમે તે સજાતીય આકૃતિઓ જેવી કે સમભુજ ત્રિકોણો, સમાન્તર ચતુષ્કોણો, અર્ધવર્તુલો અને વિષમભુજ આકૃતિઓ પણ જો તે કાટખુણ ત્રિકોણની ત્રણે ભુજાઓ ઉપર એક જ રીતે મૂકેલી હોય તો તેમને માટે પણ સત્ય છે

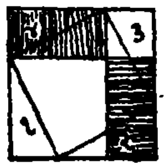
કેટલાક પ્રાચીન ગણિતશાસ્ત્રીઓ આ સિદ્ધાન્ત પીથેગોરસે શોધી કહાડયો એમ કહે છે. ઇ. સ. પહેલી સદીમાં થયેલો હેરન પૂર્ણાંક સંખ્યાની લંબાઇથી કાટખુણ ત્રિકોણ બનાવવાનો નિયમ * **પીથેગોરસે** આપ્યો એમ કહે છે. પરંતુ અર્વાચીન ગણિતશાસ્ત્રીઓને આ શંકાસ્પદ લાગે છે. **હીથ** તેની "યુકિલડ" માં આ સંબંધી દલીલો આપી અન્તે લખે છે કે: "ગ્રીક ભૂમિતિની બાબતમાં તો **પીથેગોરસે** જ આ સિદ્ધાન્ત શોધી કહાડયો. એ સંબંધી શંકા કરવાને પૂરતાં કારણ નથી. પીથેગોરસે જ પ્રથમ આ સિદ્ધાન્ત દાખલ કર્યો અને તેની સામાન્ય સાબીતી આપી." સામાન્ય સાબીતી સિવાયનું આ સત્ય તો તેના વખતથી પણ પહેલાંનું જાણીતું હતું એમ સઘળા અર્વાચીન ગણિતશાસ્ત્રીઓ માને છે.

---

* $n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$. ત્રિકોણની ભુજાઓ n, $\frac{n^2-1}{2}$ અને $\frac{n^2+1}{2}$. n ને બદલે ગમે તે કોઇ અંક મૂકવાથી ભુજાઓની લંબાઇ નીકળે.

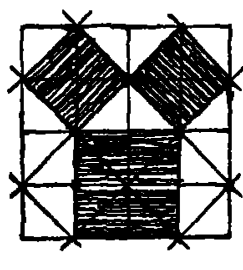
પીથેગોરસે દક્ષિણ ઇટાલીના ક્રોટોના શહેરમાં પોતાની શાળા સ્થાપી ત્યાર પહેલાં તેણે ઇજીપ્ત અને એશિયામાં અભ્યાસ કર્યો હતો. ૩, ૪, ૫ ભુજાઓથી કાટખુણ ત્રિકોણ બને છે એ તેણે ઇજીપ્તમાં સહેલાઇથી જાણ્યું હશે. ઇજીપ્તના લોકો જમીન માપતી વખતે દોરીને ગાંઠો વાળી ખુંટીઓ ચઢાડી કાટખુણો બનાવતા. પીરામિડના ઢોળાવનો કોણ પણ આ ત્રિકોણના કોણ જેટલો છે. આ બાબત પીથેગોરસ પહેલાં ચીન સુધી પૂર્વમાં જાણીતી હતી. આ સત્ય જે કેટલીક બાબતોમાં અને ખાસ કરીને સમદ્વિભુજ કાટખુણ ત્રિકોણમાં મળી આવતું તેને સામાન્ય લાગુ પાડી સાબીત કરવા પ્રયત્ન કરવાને પીથેગોરસ સ્વાભાવિક રીતે જ પ્રેરાયા હશે.

કેટલેક અંશે આના જેવી જ સાબીતી બાજુની આકૃતિમાં પણ આપી શકાય. ૧, ૨, ૩, ૪ નંબરના ત્રિકોણો આખી આકૃતિમાંથી લઇ લેવામાં આવે તો કર્ણ ઉપરનો ચોરસ બાકી રહે. પણ આખી આકૃતિમાંથી



આકૃતિમાં બતાવેલા લંબ ચોરસ લઇ લેવામાં આવે તો ત્રિકોણની ભુજાઓ ઉપરના બે ચોરસો બાકી રહે. માટે કર્ણ ઉપરનો ચોરસ બાકીની બે ભુજાઓ ઉપરના ચોરસોના સરવાળા જેટલો છે.

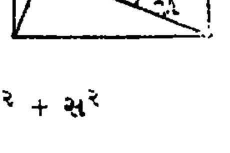
ઘણા લાંબા વખતથી ધારવામાં આવે છે કે પુરાતન દેવાલયોમાં ચહોડેલી લાદી ઉપરથી આ સિદ્ધાન્તનું સત્ય પહેલ વહેલું જડયું હશે. બાજુની આકૃતિ ઉપરથી સમદ્વિભુજ કાટખુણ ત્રિકોણમાં આ સત્ય ખાસ માલુમ પડે છે એ સહજ સમજાય તેમ છે.



ભારતવર્ષમાં આ સત્ય **પીથેગોરસના** વખત પહેલાં પણ જાણીતું હતું. **આપસ્તમ્બનાં શુલ્વસૂત્રો** કે જે જુનું ધાર્મિક પુસ્તક છે તેમાં જુદી જુદી આકૃતિઓ બનાવવાને નિયમો આપેલા છે. તેમાં કાટખુણ ત્રિકોણ બનાવવાને દોરીઓની લંબાઇ: ૩, ૪, ૫; ૧૨, ૧૬, ૨૦; ૧૫, ૨૦, ૨૫; ૫, ૧૨, ૧૩; ૧૫, ૩૬, ૩૯; ૮, ૧૫, ૧૭; ૧૨, ૩૫, ૩૭ આપવામાં આવી છે. આ ઉપરથી એટલું તો સત્ય છે કે ઇજીપ્તના લોકોની માફક આ સત્ય ભારતવાસીઓને પણ ઘણા લાંબા વખતથી જાણીતું હતું પણ તેઓ તેની સાબીતી આપી શકતા એવા ચોક્કસ પુરાવા મળતા નથી.

પીથેગોરસે આ સિદ્ધાન્ત કેવી રીતે સાબીત કર્યો તે ચોક્કસ કહી શકાય તેમ નથી. કેટલાક માને છે કે સજાતીય ત્રિકોણોથી અને બીજા કેટલાક માને છે કે ચોરસના અનુકૂળ ભાગો પાડીને તેમણે તે સાબીત કર્યો હશે. ભારતવર્ષના મહાન ગણિતશાસ્ત્રી **ભાસ્કરાચાર્યે** (જન્મ ઇ. સ. ૧૧૧૪) ઉપરોક્ત બન્ને રીતે આ સિદ્ધાન્તની સાબીતી તેમના બીજગણિતમાં આપેલી છે. તેમાંની નીચેની એક સાબીતી વિદ્યાર્થીઓ સહેલાઇથી સમજી શકે તેવી હોવાથી અહીં આપી છે.

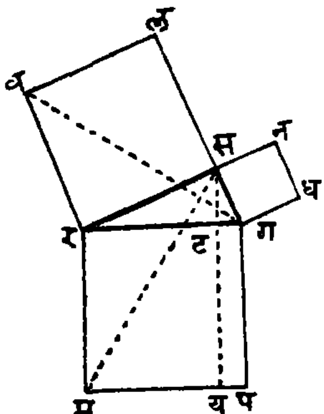
બાજુની આકૃતિમાં ચોરસના અનુકૂળ ભાગ પડેલા છે. તેમાં રેખાઓની લંબાઇ પણ જણાવેલી છે. આખા ચોરસના પાંચ ભાગ પાડેલા છે. વચ્ચે ચોરસ છે અને આજુબાજુ કાટખુણ ત્રિકોણો છે.



$$લ^{૨} = ૪\frac{રસ}{૨} + (ર - સ)^{૨} \quad ર^{૨} + સ^{૨}$$

સિદ્ધાન્ત ૨૪

કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણ ઉપરનો ચોરસ બાકીની બે ભુજાઓ ઉપરના ચોરસોના સરવાળા બરાબર છે.



પક્ષ : △ सरग નો ∠ स કાટખુણો છે. रवलस, रमपग અને गधनस ચોરસો અનુક્રમે रस, रग અને गस ઉપર દોરેલા છે.

સાધ્ય : रमपग = रवलस + गधनस.

રચના : सय ‖ रम દોરો અને रग ને ट માં છેદવાદ્યો.
वग, मस જોડો.

સાબીતી : ∠ रसग + ∠ रसल = ૨ કા. ખુ. પક્ષ.
∴ लसग સુરેખા છે.
તેવીજ રીતે रसन પણ સુરેખા છે.
હવે ∠ मरग = वरस ∴ દરેક કા. ખુ. પક્ષ.
∠ सरग બન્નેમાં ઉમેરો.
∴ ∠ मरस = ∠ गरव.

હવે △ ઓ मरस અને गरव માં

मर = गर ∴ એક ચોરસની ભુજાઓ

रस = रव ∴ ,,

∠ मरम = ∠ गरव. સાબીત કર્યું.

∴ △ मरस ≡ △ गरव.

અને रमयट = ૨ △ मरस ∵ એકજ સમાન્તરો વચ્ચે

रवलस = ૨ △ गरव ∵ ,,

∴ रमयट = रवलस

તેવીજ રીતે गपयट = गधनस.

∴ रमयट + गपयट = रवलस + गधनस.

∴ रमपग = रवलस + गधनस.

મનોયત્ન ૨૪

૧. ત્રિકોણની બે ભુજાઓ ઉપરના ચોરસનો તફાવત, તેની ત્રીજી ભુજાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી ભુજા ઉપર દોરેલા લંબથી થતા ખંડો ઉપરના ચોરસોના તફાવત બરાબર છે.

૨. સિધ્ધાન્તની આકૃતિમાં સાબીત કરો: सम ⊥ गव.

૩. ચોરસનું ક્ષેત્રફળ તેના વિકર્ણ ઉપરના ચોરસથી અર્ધું છે.

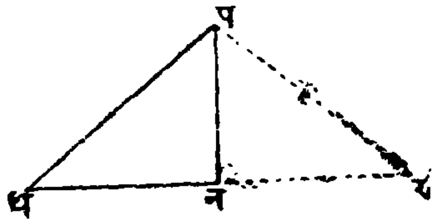
૪. સમભુજ ત્રિકોણની ત્રણ ભુજાઓ ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો શિરોબિંદુમાંથી પાયા ઉપર દોરેલા લંબો ઉપરના ચોરસોના સરવાળાથી ચાર ગણો છે.

૫. ચતુષ્કોણના વિકર્ણો કાટખુણે છેદાતા હોય તો સામેની બે ભુજાઓ ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો બાકીની બે ભુજાઓ ઉપરના ચોરસોના સરવાળા બરાબર છે.

૬. સમકોણ △ सरग માં सल ⊥ रग છે, તો सल² = ૩ रल².

સિદ્ધાન્ત ૨૫

ત્રિકોણની એક ભુજા ઉપરનો ચોરસ બાકીની બે ભુજાઓ ઉપરના ચોરસોના સરવાળા બરાબર હોય, તો તે બે ભુજાઓથી બનેલો કોણ કાટખુણો છે.



પક્ષ : $पध^2 = पन^2 + धन^2$

સાધ્ય : $\angle$ पनध = કાટખુણો.

રચના : न માંથી रन $\perp$ पन દોરો. धन = नर બનાવો. रप જોડો.

સાબીતી : $पर^2 = पन^2 + नर^2$ $\because \angle$ पनर = કા. ખુ. — રચના.

અને नर = धन — રચના.

$\therefore पर^2 = पन^2 + धन^2$

પણ $पध^2 = पन^2 + धन^2$ — પક્ષ.

$\therefore पर^2 = पध^2$ અને पर = पध

હવે $\triangle$ઓ पधन અને परन માં

धन = नर — રચના.

पध = पर — સાબીત કર્યું.

पन સામાન્ય.

$\therefore \triangle पधन \equiv \triangle परन$

$\therefore \angle$ पनध = $\angle$ पनर = કાટખુણો — પક્ષ.

$\therefore \angle$ पनध = કાટખુણો.

મનોયત્ન ૨૫

૧. સમદ્વિભુજ ત્રિકોણનો પાયો ૪" અને દરેક સમાન ભુજા ૫" હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ કેટલું ?

૨. નીચેના માપના લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ અને પરિમિતિ કહાડોઃ વિકર્ણ = ૪૧ યાર્ડ, એક ભુજા = ૪૦ યાર્ડ.

૩. સમકોણ ત્રિકોણની ઉંચાઇ ૧૫" હોય તો તેની ભુજાની લંબાઇ કેટલી ?

૪. સમભુજ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો ૩૨" અને ૬૦" હોય, તો તેની ભુજાની લંબાઇ કેટલી ?

૫. ૩૬' લાંબી નીસરણી ભીંતને તેની બધી પીઠ અડે તેવી રીતે ગોઠવી છે. તેની એડક ભીંતથી ૧૦' દૂર ખશેડવામાં આવે તો તેનું મથાળું કેટલું નીચે ઉતરશે ?

૬. ૩૦' લાંબી નીસરણી એક શહેરીની એક બાજુની ૨૪' ઉંચી બારીએ પહોચે છે. તેની એડક તેજ જગાએ રહે તેવી રીતે તેને ફેરવીને શહેરીની બીજી બાજુની ભીંતે મૂકવાથી તે તે બાજુની એક એક બારીને પહોચી રહે છે. નીસરણીની નવી સ્થિતિ પહેલાંની સ્થિતિને કાટખુણે હોય તો શહેરીની પહોળાઇ અને બીજી બાજુની બારીની રસ્તાથી ઉંચાઇ કેટલી ?

૭. નદીના એક કિનારા ઉપર ૪૩' ઉંચાઇના ઝાડની ટોચે ૬૫' લાંબી બાંધેલી દોરી સામેના કિનારા ઉપર ઉભેલા માણસના હાથને જમીનથી ૫' ઉંચાઇએ પહોચે છે. તો નદીની પહોળાઇ કેટલી ?

૮. ત્રણ ઘોડેસ્વારો એક ગામથી નીકળે છે. એક કલાકે ૧૦ માઇલની ઝડપે ઉત્તર તરફ, બીજો ૮ માઇલની ઝડપે, પૂર્વ તરફ અને ત્રીજો ૭ માઇલની ઝડપે દક્ષિણ તરફ જાય છે. તો બે કલાકને અંતે તેઓ એકબીજાથી કેટલા દૂર હશે ?

૯. ૧૦૦ હાથ ઉંચા વૃક્ષની ટોચ ઉપર બે વાંદરા બેઠેલા છે. એક ઝાડ ઉપરથી ઉતરી ઝાડથી ૨૦૦ હાથ દૂર આવેલી તળાવડીએ પાણી પીવાને જાય છે. બીજો ત્યાંથી ઉંચો કૂદી કર્ણ રસ્તે તળાવડીએ પહોચે છે. આમ કરતાં માલૂમ પડે છે કે બન્નેને ચાલવાનો માર્ગ સરખો થાય છે. તો હે વિદ્વન્, વાંદરો ઝાડ ઉપરથી કેટલો ઉંચો કૂદીને તળાવડીએ ગયો તે કહો *

૧૦. ચક્રવાક, ક્રૌંચ, આદિ પક્ષિઓ જેના જલમાં વિહાર કરે છે એવા એક તળાવમાં જલની ઉપર એક વેંત લાંબા કમલના દાંડાના છેડાનો ભાગ દેખાય છે. આ કમલ મંદમંદ વાતા પવનની લહરથી બે હાથ દૂર જલમાં ડૂબી જાય છે. તો તળાવમાં કેટલું પાણી હશે તે હે ગણક, શીઘ્ર કહો. *

૧૧. કાટખુણ ત્રિકોણમાં કર્ણ ઉપર દોરેલો સમભુજ ત્રિકોણ બાકીની બે ભુજાઓ ઉપર દોરેલા સમભુજ ત્રિકોણોના સરવાળા બરાબર છે.

૧૨. $\triangle$ सरग ની અંદર म બિંદુ લ્યો. मप, मघ, मन અનુક્રમે सर, रग અને गस ઉપર લંબો દોરો. સાબીત કરો:
सप² + रघ² + गन² = पर² + घग² + नस²

૧૩. कचटत લંબચોરસમાં प એક બિંદુ છે. સાબીત કરો:
पक² + पट² = पच² + पत²

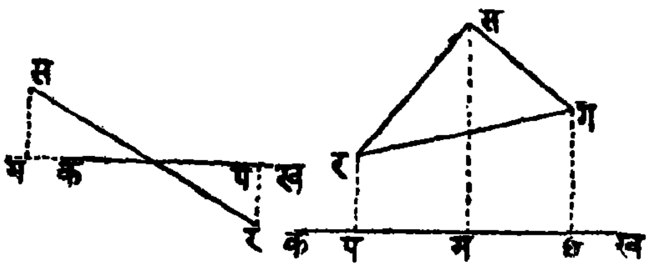
૧૪. સિદ્ધાન્ત ૨૪ ની આકૃતિમાં સાબીત કરો: (ક) सर² = रग.रट, (ખ) सग² = गर.गट, (ગ) सट² = रट.टग.

૧૫. કાટખુણ ત્રિકોણના લઘુકોણોમાંથી દોરવામાં આવેલી મધ્યગાઓ ઉપરના ચોરસોનો ચાર ગણો સરવાળો, કર્ણ ઉપરના પાંચ ચોરસો જેટલો છે.

---

* લીલાવતી (ભાસ્કરાચાર્ય)

પ્રક્ષેપ



કોઇ એક સુરેખા ઉપર તેની બહાર આવેલા કોઇ એક બિંદુનો પ્રક્ષેપ, તે બિંદુમાંથી સુરેખા ઉપર દોરેલા લંબનો પાદ છે.

ઉપરની આકૃતિઓમાં स. र. વગેરેના પ્રક્ષેપો म, प, વગેરે છે.

કોઇ એક સુરેખાનો બીજી સુરેખા ઉપરનો પ્રક્ષેપ તેના છેડાનાં બિંદુઓમાંથી બીજી સુરેખા ઉપર દોરવામાં આવેલા લંબોના પાદો વચ્ચેની સુરેખા છે.

સૂચના: જે સુરેખા ઉપર પ્રક્ષેપ કહાડવાનો હોયતેની લંબાઇ પૂરતી ન હોય તો તેને લંબાવી પ્રક્ષેપ કહાડવો.

ઉપરની આકૃતિઓમાં सर, सग અને रग ના कख ઉપરના પ્રક્ષેપો અનુક્રમે मप, मघ, અને पघ છે.

મનોયત્ન

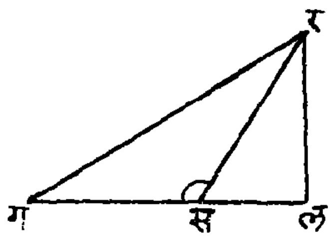
૧. સિદ્ધાન્ત ૨૬, ૨૭ ની આકૃતિઓમાં गर, सर અને लर ના गस ઉપરના પ્રક્ષેપોનાં નામ આપો.

૨. કોઇ એક ત્રિકોણ દોરી તેની ભુજાઓના પાસેની ભુજાઓ ઉપરના પ્રક્ષેપો દોરી તેમનાં નામ આપો.

૩. કોઇ એક સુરેખાનો બીજી સુરેખા ઉપર લાંબામાં લાંબો અને ટુંકામાં ટુંકો પ્રક્ષેપ ક્યારે હોય?

સિદ્ધાન્ત ૨૯

ગુરુકોણ ત્રિકોણમાં ગુરુકોણની સામેની ભુજા ઉપરનો ચોરસ બાકીની બે ભુજાઓ ઉપરના ચોરસો કરતાં ગુરુકોણ બનાવનારી એક ભુજા અને બીજીના તે ઉપરના પ્રક્ષેપથી બનતા બે લંબચોરસો જેટલો વધારે છે.



પક્ષ : $\triangle$ सरग નો $\angle$ स ગુરુકોણ છે.

गस લંબાવેલી ઉપર र માંથી रल લંબ દોરેલો છે.

सल, सर નો गस ઉપર પ્રક્ષેપ છે.

સાધ્ય : रग२ = गस२ + सर२ + २गस.सल

સાબીતી : गल२ = (गस + सल)२

= गस२ + सल२ + २ गस.सल

બન્ને બાજુએ लर२ ઉમેરો.

∴ गल२ + लर२ = गस२ + सल२ + लर२ + २गस.सल

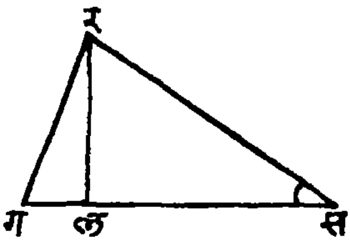
પણ गल२ + लर२ = रग२ ∴ $\angle$ ल કા. ખુ.

અને सल२ + लर२ = सर२

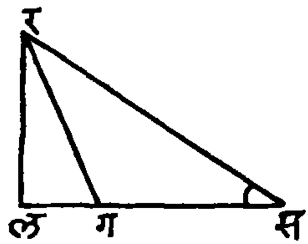
∴ रग२ = गस२ + सर२ + २ गस.सल

સિદ્ધાન્ત ૨૭

કોઇ પણ ત્રિકોણમાં લઘુકોણની સામેની ભુજા ઉપરનો ચોરસ, બાકીની બે ભુજાઓ ઉપરના ચોરસો કરતાં, લઘુકોણ બનાવનારી એક ભુજા અને બીજીના તે ઉપરના પ્રક્ષેપથી બનતા બે લંબ-ચોરસો જેટલો ઓછો છે.



આકૃતિ–૧



આકૃતિ–૨

પક્ષ : $\triangle$ सरग નો $\angle$ स લઘુકોણ છે. सग કે सग લંબા-વેલી રેખા ઉપર र માંથી रल લંબ દોરેલો છે
सल, सर નો सग ઉપર પ્રક્ષેપ છે.

સાધ્ય : $रग^{२} = गस^{२} + सर^{२} - २\ गस . सल$.

સાબીતી : $रग^{२} = गल^{२} + रल^{२}$ $\quad \because \angle$ ल કા. ખુ.

$= (गस - सल)^{२} + रल^{२}$ આ. ૧ માં

$= (सल - गस)^{२} + रल^{२}$. આ. ૨ માં

$\therefore$ બન્ને આકૃતિઓમાં

$रग^{२} = गस^{२} - २\ गस . सल + सल^{२} + रल^{२}$

પરંતુ $सल^{२} + रल^{२} = सर^{२}$ $\quad \because \angle$ ल કા ખુ.

$\therefore रग^{२} = गस^{२} + सर^{२} - २\ गस . सल$

મનેાયત્ન ૨૬, ૨૭

૧. નીચેના માપના ત્રિકેાણેા, કાટખુણુ, ગુરુકેાણુ કે લઘુકેાણુ છે? તે દરેકનું ક્ષેત્રફળ ગણતરી કરી કહાડેા.

(ક) ૨, ૩, ૪; (ખ) ૫. ૬, ૭; (ગ) ૧૧, ૧૩, ૨૦; (ઘ) ૧૩, ૧૪, ૧૫; (ચ) ૩, ૪, ૫.

૨. નીચેના માપના સમલંબચતુષ્કેાણેાનું ક્ષેત્રફળ કહાડેા: (ક) સમાન્તર ભુજાએા ૩૦ અને ૧૩, બાકીની ભુજાએા ૨૬ અને ૨૫ લાંબી. (ખ) સમાન્તર ભુજાએા ૧૨,૨૬ અને બાકીની ૧૫,૧૩.

૩. सरग સમભુજ ત્રિકેાણુની रग ભુજા ड સુધી લંબાવી सड જોડેા. સાબીત કરેા: (ક) सड२ = रग२ + गड२ + रग.गड, (ખ) सड२ = रग२ + रड२ – रग.रड.

૪. सरग સમદ્વિભુજ ત્રિકેાણુ છે. डट || रग દેારેા. સાબીત કરેા: रट२ = रग.डट + गट२.

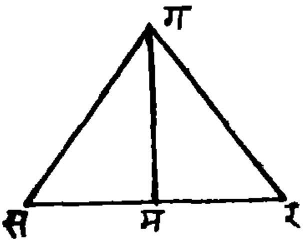
૫. सरग સમદ્વિભુજ ત્રિકેાણુના પાયાના ∠ र માંથી सग ઉપર रड લંબ દેારેલેા છે. સાબીત કરેા:—रग२ = २ सग. गड.

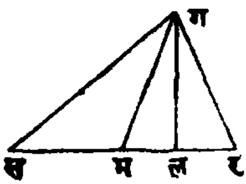
૬. सरगम સમલંબચતુષ્કેાણુમાં સાબીત કરેા: सग२ + रम२ = सम२ + रग२ + २ सर.गम.

૭. सरग લઘુકેાણુ ત્રિકેાણુના र અને ग માંથી સામેની ભુજાએા ઉપર रट અને गड લંબ દેાર્યા છે. સાબીત કરેા: (ક) सट.सग=सड.सर; (ખ) रग२=सर.डर+सग.टग.

સિદ્ધાન્ત ૨૮

કોઇ પણ ત્રિકોણની બે ભુજાઓ ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો અર્ધી ત્રીજી ભુજા ઉપરના ચોરસ અને ત્રીજી ભુજાને દુભાગનાર મધ્યગા ઉપરના ચોરસના સરવાળાથી બમણો છે.





પક્ષ : △सरग ની गम મધ્યગા सर ને દુભાગે છે.

સાધ્ય : गस² + गर² = २ (मम² + गम²)

સાબીતી :

૧. જો ∠ गमस કા. ખુ. હોય તો ∠ गमर પણ કા. ખુ. છે.

∴ गम² = सम² + गम²

અને गर² = रम² + गम²

પરંતુ रम² = सम². ∵ रम = मम. પક્ષ

∴ गस² + गर² = २ (मम² + गम²)

૨. જો ∠ गमस કા. ખુ. ન હોય તો सर ઉપર गल લંબ દોરો

∵ ∠ गमस > ∠ गलम કે જે કા. ખુ. છે.

∴ ∠ गमस ગુરુકોણ અને ∠ गमल લઘુકોણ છે.

∴ गस² = सम² + गम² + २ मम. मल.

અને $\text{गर}^2 = \text{गम}^2 + \text{रम}^2 - 2\,\text{रम}.\text{मल}$.

પરંતુ $\text{रम} = \text{सम}$ પક્ષ.

$\therefore \text{गस}^2 + \text{गर}^2 = \text{सम}^2 + \text{गम}^2 + 2\,\text{सम}.\text{मल}$

$+ \text{गम}^2 + \text{सम}^2 - 2\,\text{सम}.\text{मल}$

$= 2\,(\text{सम}^2 + \text{गम}^2)$

મનોયત્ન ૨૮

૧. નીચેની લંબાઈના ભુજાઓવાળા ત્રિકોણની મધ્યગાઓ ગણતરી કરી કહાડો: (ક) ૪, ૬, ૭; (ખ) ૪, ૫, ૭.

૨. એક ત્રિકોણની ત્રણ ભુજાઓ ૫', ૬', અને ૭' છે. તો તેની મધ્યગાઓ ઉપરના ચોરસનો સરવાળો ગણતરી કહાડો.

૩. એક ત્રિકોણની બે ભુજાઓ ૮ સેમિ. અને ૧૬ સેમિ. છે અને મધ્યગા ૧૨ સેમિ. છે તો ગણતરી કરી તેના પાયાની લંબાઈ શોધી કહાડો. આકૃતિ દોરીને તે બરાબર છે તે બતાવો.

૪. સમાન્તર ચતુષ્કોણની પાસેની બે ભુજાઓ ૧૩ અને ૧૯ છે અને વિકર્ણ ૨૪ છે તો બીજો વિકર્ણ ગણતરી કરી શોધી કહાડો.

૫. सरग સમદ્વિભુજ ત્રિકોણનો रग પાયો ड સુધી લંબાવી $\text{गड} = \text{रग}$ કરી હોય તો $\text{सड}^2 = \text{सग}^2 + 2\,\text{रग}^2$ સાબીત કરો.

૬ સમાન્તર ચતુષ્કોણના વિકર્ણો ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો તેની ભુજાઓ ઉપરના ચોરસોના સરવાળાની બરાબર છે.

૭. सरगम સમાન્તર ચતુષ્કોણની અંદર प નામનું એક બિંદુ આવેલું છે. તેના વિકર્ણો ઘ આગળ છેદાય છે. સાબીત કરો;
$\text{पस}^2 + \text{पर}^2 + \text{पग}^2 + \text{पम}^2 = \text{सर}^2 + \text{रग}^2 + 4\,\text{पघ}^2$

૮. ત્રિકોણની ભુજાઓ ઉપરના ચોરસોનો ત્રણગણો સરવાળો તેની મધ્યગાઓ ઉપરના ચોરસોના ચારગણા સરવાળાની બરાબર છે.

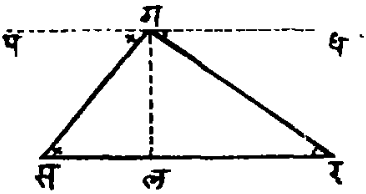
૯. △ सरगનું મધ્યગાસંગમબિંદુ म છે. સાબીત કરો:
$૩\,(\text{मस}^{2} + \text{मर}^{2} + \text{मग}^{2}) = \text{सर}^{2} + \text{रग}^{2} + \text{गस}^{2}$.

૧૦. કોઈ પણ ચતુષ્કોણની ચાર ભુજાઓ ઉપરના ચોરચોનો સરવાળો તેના બે વિકર્ણો ઉપરના ચોરસો અને વિકર્ણોના મધ્યબિંદુઓને જોડનારી રેખા ઉપરના ચાર ચોરસોના સરવાળા બરાબર છે.

૧૧. કોઈપણ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો તેની સામેની ભુજાઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી રેખાઓ ઉપરના ચોરસોના સરવાળાથી બમણો છે.

ત્રિકોણ રચના

૧. ઉંચાઇ (૧·૬ સેમિ.) અને પાયાના કોણો (∠ स = ૫૦°. ∠ र = ૩૫°) આપ્યાં હોય તે ઉપરથી △सरग દોરવો.



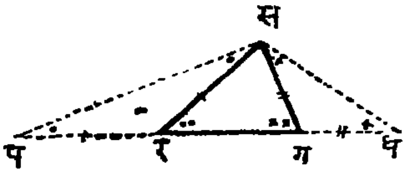
રચના : पगध કોઈ એક સુરેખા દોરો. તેની એક જ બાજુએ પણ વિરુદ્ધ દિશાઓમાં ग આગળ ∠ पगस = ૫૦° અને ∠ धगर = ૩૫° બનાવો. ग માંથી गल = ૧·૬ સેમિ. ⊥ पध દોરો. ल માંથી सलर ∥ पध દોરો અને गस ને स માં અને गर ને र માં મળવાદો, એટલે सरग માગેલો △ થશે.

સાબીતી : ∠ गसर = વ્યુ. ∠ पगस = ૫૦°
∠ गरस = વ્યુ. ∠ धगर = ૩૫° } ∵ सर∥पध રચના

ઉંચાઇ गल = ૧·૬ સેમિ. રચના.

∴ सरग માગેલો ત્રિકોણ છે.

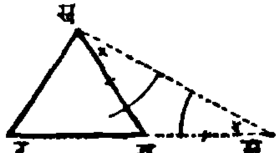
૨. પરિમિતિ (स + र + ग = ૨") અને બે કોણો (∠र = ૪૦°, ∠ग = ૭૦°) આપેલા હોય તે ઉપરથી △सरग દોરવો.



રચના : पघ = ૨" દોરો. તેની એકજ બાજુએ प અને घ આગળ અનુક્રમે ∠घपस = ½ ∠र = ૨૦° અને ∠पघस = ½ ∠ग = ૩૫° બનાવો અને सपघ ત્રિકોણ પૂરો કરો. स આગળ सघ ઉપર ∠घसग = ∠सघप અને सप ઉપર स આગળ ∠पसर = ∠सपघ થાય તેમ सग અને सर રેખાઓ દોરો: તેમને पघ માં અનુક્રમે ग અને र માં મળવાદો; એટલે सरग માગેલો ત્રિકોણ થશે.

સાબીતી આપો.

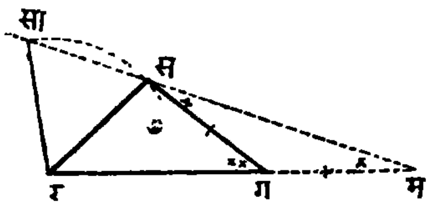
૩. બે ભુજાઓનો સરવાળો (स + र = ૩·૫ સેમિ.), ત્રીજી ભુજા (ग = ૧·૭ સેમિ.) અને ત્રીજી ભુજાની સામેનો ન હોય તેવો એક કોણ (∠र = ૫૫°) આપેલાં હોય તે ઉપરથી △सरग દોરવો.



રચના : रम = ૩·૫ સેમિ. દોરો. र આગળ ∠मरस = ૫૫° બનાવો. रस = ગ = ૧·૭ સેમિ. લ્યો. सम જોડો. सम ઉપર स આગળ ∠मसग = ∠समर થાય તેવી રીતે सग દોરી मर ને ग માં મળવાદ્યો, એટલે सरग માગેલો △ થશે.

સાબીતી આપો.

૪. બે ભુજાઓનો સરવાળો (સ + ર =૧·૯″), ત્રીજી ભુજા (ગ =·૭″) અને ત્રીજી ભુજાની સામેનો કોણ (ग = ૪૦°) આપેલાં હોય તે ઉપરથી △सरग દોરવો.



રચના : रम = ૧·૯″ દોરો म આગળ ∠रमस = ½ ∠ग = ૨૦° બનાવો. र કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા = ગ = ·૭″ લઈ ચાપ દોરો અને मस ને स માં છેદવાદ્યો. सर જોડો. सम ઉપર स આગળ ∠मसग = ∠समर બનાવી सग ને मर માં ग આગળ મળવાદ્યો, એટલે सरग માગેલો ત્રિકોણ થશે.

સાબીતી આપો.

સૂચના : આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે स ને બદલે सा બિંદુ લેવાથી માગેલી શરતો પૂરી પાડતો બીજો ત્રિકોણ પણ બને.

મનોયત્ન

૧. નીચેના માપનો ત્રિકોણ દોરો અને તેની ભુજાઓ માપો:—
$\angle$ र = ૪૭°, ग = ૭૫°, स માંથી रग ઉપરનો લંબ =૨·૩″.

૨. એક વહાણ (व) દરિયાના કિનારા ઉપર આવેલી स અને र જગાઓએથી $\angle$ वसर = ૪૫° અને $\angle$ वरस = ૭૭ બનાવતું દેખાય છે. કિનારાથી તે વહાણ ૩ માઇલ હોય તો તેનું स અને र થી અંતર કેટલું ?

૩. ૫૬′ ઉંચાઇના એક દેવાલયનું શિખર स અને र જગાઓએથી દેખાય છે. દેવાલયનો પાયો અને स, र જગાઓ એકજ સુરેખામાં આવેલાં છે અને શિખર, स અને र આગળ ૩૭°, ૫૩° ના કોણો બનાવે છે. स અને र જગાઓ દેવાલયની એકજ બાજુએ આવેલી હોય તો અને દેવાલયની સામસામેની બાજુએ આવેલી હોય તો તે બે વચ્ચેનું અંતર કેટલું ?

૪. નીચેના માપના ત્રિકોણો દોરો અને બાકીની ભુજાઓ અને કોણો માપો:—

(ક) સ + ર + ગ = ૬·૨″, र = ૫૦°, स = ૭૩°.

(ખ) સ + ર + ગ = ૩·૫″, ग = ૪૫°, र = ૮૦°.

(ગ) સ + ર + ગ = ૫·૩″, स = ૬૦°, ग = ૭૫°.

(ઘ) સ + ર = ૩·૫″, ગ = ૨·૭″, स = ૫૮°.

(ચ) સ + ર = ૬·૫ સેમિ., ગ = ૪·૭ સેમિ., र = ૭૮°.

(છ) ર + ગ = ૪·૭″, સ = ૩·૧″, ग = ૬૦°.

(જ) ર + ગ = ૯ સેમિ., સ = ૬ સેમિ., र = ૭૫°.

(ઝ) ગ + સ = ૩·૮", ર = ૨·૫", ग = ૫૫°.

(ટ) ગ + સ = ૪·૫", ર = ૨·૯", स = ૬૮°.

(ઠ) સ + ર = ૨·૮", ગ = ૨·૪", ग = ૧૧૪°.

(ડ) ર + ગ = ૪·૯ સેમિ., સ = ૪·૩ સેમિ., स = ૧૦૦°.

(ઢ) ગ + સ = ૫·૫", ર = ૪·૬" र = ૧૨૦°.

(ત) પરિમિતિ = ૭", ઉંચાઇ = ૧·૯" અને પાયાનો એક કોણ = ૩૯°.

(થ) ક્ષેત્રફળ = ૬ ચો. ઇંચ. પાયો = ૪" અને બીજી એક ભુજા = ૩·૮".

(દ) પાયાના કોણો અનુક્રમે ૬૦° અને ૭૫° અને ઉંચાઇ ૨·૧".

(ધ) ઉંચાઇ ૨·૫" હોય તેવા સમકોણ ત્રિકોણ.

(ન) પાયો = ૨" અને એક કોણ = ૩૦° હોય તેવો કા. ખુ. ત્રિકોણ.

(પ) પાયો = ૨·૫" અને શિરઃ કોણ = ૫૦° હોય તેવો સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ.

(ફ) દરેક સમાનભુજા = ૩·૨" અને સમકોણ ૪૦° હોય તેવો સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ.

(બ) દરેક સમાન ભુજા = ૩·૫" અને ઉંચાઇ ૨·૩" હોય તેવો સદ્વિભુજ ત્રિકોણ.

ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વો

ભાગ ૪

વર્તુલ

ભાગ ૧ માં આપવામાં આવેલી વર્તુલની વ્યાખ્યાઓ ઉપ-રથી નીચેના કેટલાક સાદા ધર્મો નીકળી શકે છે:

૧. વર્તુલની અંદર આવેલા બિંદુમાંથી દોરેલી રેખા બન્ને બાજુ પૂરતી લંબાવવામાં આવે તો તે વર્તુલને બે બિંદુઓમાં છેદે છે.

૨. એક જ વર્તુલની સઘળી ત્રિજ્યાઓ અને સઘળા વ્યાસો સમાન છે.

૩. દરેક વ્યાસ કેન્દ્ર આગળ દુભાગાય છે.

૪. કોઈ પણ બિંદુથી કેન્દ્ર સુધીનું અંતર તેની ત્રિજ્યાથી ઓછું, વધારે, વા ત્રિજ્યા જેટલું હોય તો તે વર્તુલની અંદર, બહાર, વા પરિધિ ઉપર આવેલું છે.

૫. કોઈ પણ બિંદુ વર્તુલની અંદર, બહાર, વા પરિધિ ઉપર આવેલું હોય તો, તેથી કેન્દ્ર સુધીનું અંતર ત્રિજ્યાથી ઓછું, વધારે, વા ત્રિજ્યા જેટલું છે.

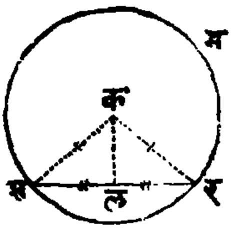
૬. સમાન લંબાઈની ત્રિજ્યાનાં વર્તુલો સમાન છે.

૭. સમાન વર્તુલોની ત્રિજ્યાઓ સમાન છે.

સિદ્ધાન્ત ૨૯

૧. વર્તુલના કેન્દ્ર અને જીવાના મધ્યબિંદુને જોડનારી રેખા જીવાને લંબ છે.

૨. વર્તુલના કેન્દ્રમાંથી જીવા ઉપર દોરેલો લંબ જીવાને દુભાગે છે.



૧. પક્ષ : सरम વર્તુલની सर એક જીવા છે. कल, કેન્દ્ર क અને જીવાના મધ્યબિંદુ ल ને જોડે છે. सल = रल.

સાધ્ય : कल ⊥ सर.

રચના : सक, रक જોડો.

સાબીતી : △ઓ सलक અને रलक માં

सक = रक ∵ ત્રિજ્યાઓ.

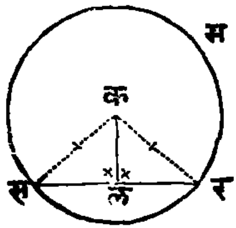
सल = लर પક્ષ.

कल સામાન્ય

∴ △सलक ≡ △रलक.

∴ ∠सलक = ∠रलक = ૯૦° ∵ सर સુરેખ

∴ कल ⊥ सर.



૨ પક્ષ : सरम વર્તુલની सर એક જીવા છે. क કેન્દ્ર અને कल ⊥ सर છે.

સાધ્ય : सल = लर.

રચના : सक, रक જોડો.

સાબીતી : કા. ખુ. △ઓ सलक અને रलक માં
કર્ણ सक = કર્ણ रक ∵ ત્રિજ્યાઓ
कल સામાન્ય
∴ △सलक ≡ △रलक
∴ सल = लर.

ઉપસિદ્ધાન્તો :

૧. જીવાને દુભાગનાર લંબ વર્તુલના કેન્દ્રમાં થઇને પસાર થાય છે.

૨. વર્તુલની કોઇ પણ બે જીવાઓને દુભાગનાર લંબો જે બિંદુમાં પરસ્પર છેદાય તે બિંદુ વર્તુલનું કેન્દ્ર છે.

૩. એક સુરેખામાં ન હોય તેવાં ત્રણ બિંદુઓમાં થઇને પસાર થાય એવું ફક્ત એકજ વર્તુલ દોરી શકાય.

૪. બે વર્તુલો પરસ્પર બેથી વધારે બિંદુઓમાં છેદી શકે નહિ.

૫. વર્તુલની એક કરતાં વધારે જીવાઓને દુભાગનારા લંબો એકબિંદુગામી છે.

૬. કોઇ પણ સુરેખઆકૃતિની ભુજાઓને દુભાગનાર લંબો એકબિંદુગામી હોય તો તેનાં શિરોબિંદુઓમાં થઇને પસાર થાય એવું એક વર્તુલ દોરી શકાય.

મનોયત્ન ૨૯

૧. એક વર્તુલને એકથી વધારે કેન્દ્રો હોઇ શકે નહિ.

૨. બે સ્થિર બિંદુઓમાં થઇને પસાર થતાં વર્તુલોનાં કેન્દ્રોનું નિધાન તે બે બિંદુઓને જોડનારી રેખાને દુભાગનાર લંબ છે.

૩. એક વર્તુલની બે સમાન્તર જીવાઓમાંની એકને દુભાગનાર લંબ બીજીને પણ કાટખુણે દુભાગે છે.

૪. વર્તુલની સમાન્તર જીવાઓનાં મધ્યબિંદુઓ જીવાઓને કાટખુણે દોરેલા વર્તુલના વ્યાસ ઉપર છે.

૫. વ્યાસ ન હોય તેવી બે જીવાઓ પરસ્પર દુભાગે નહિ.

૬. **म** અને **प** કેન્દ્રવાળાં બે વર્તુલોના એક છેદનબિંદુમાંથી બન્ને વર્તુલોના પરિધોને મળે તેવી રીતે **सर** ‖ **मप** દોરવામાં આવે તો **सर** = ૨ **मप** થાય.

૭, બે વર્તુલોના બે છેદનબિંદુઓમાંથી **सर** ‖ **गम** સુરેખાઓ બન્ને વર્તુલોના પરિધોને બન્ને બાજુ મળે તેવી રીતે દોરી હોય તો, **सर** = **गम** થાય.

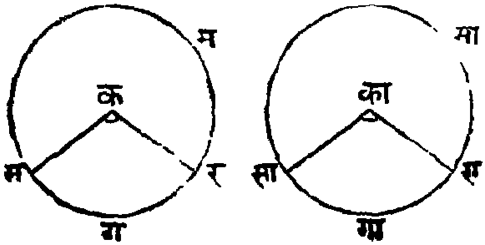
૮. એક સુરેખા ઉપર આવેલાં ત્રણ બિંદુઓમાં થઇને પસાર થતું એક વર્તુલ દોરી શકાય નહિ.

સિદ્ધાન્ત ૩૦

સમાન વર્તુલોમાં (વા એકજ વર્તુલમાં),

(૧) જો બે ચાપો કેન્દ્રો આગળ સમાન કોણો બનાવે, તો તે સમાન છે;

(૨) જો બે ચાપો સમાન હોય, તો તે કેન્દ્રો આગળ સમાન કોણો બનાવે છે.



૧. પક્ષ : सरम અને सारामा સમાન વર્તુલો છે. सगर અને सागारा ચાપો કેન્દ્રો क અને का આગળ સમાન કોણો બનાવે છે: ∠ सकर = ∠ साकारा.

સાધ્ય : ચાપ सगर = ચાપ सागारा.

સાબીતી : ⊙ सरम, ⊙ सारामा ઉપર એવી રીતે મૂકો કે क, का ઉપર પડે.
વર્તુલો સમાન હોવાથી એકનો પરિઘ બીજા ઉપર પડશે.
જ્યાં સુધી कस, कासा ઉપર ન પડે ત્યાં સુધી ⊙ सरम ને કેન્દ્ર ઉપર ફેરવો.

∵ ∠ सकर = ∠ साकारा

∴ कर, कारा ઉપર પડશે અને પરિધો પરસ્પર મળી
જતા હોવાથી स, सा માં અને र, रा માં મળી જશે.

∴ ચાપ सगर, ચાપ सागारा માં મળી જશે.

∴ ચાપ सगर = ચાપ सगारा.

૨. પક્ષ : ચાપ सगर = ચાપ सागारा.

સાધ્ય : ∠ सकर = ∠ साकारा.

સાબીતી : ●सरम, ●सारामा ઉપર એવી રીતે મૂકો કે क, का ઉપર પડે.

વર્તુલો સમાન હોવાથી એકનો પરિઘ બીજાના પરિઘ ઉપર પડશે.

स, सा ઉપર પડે ત્યાં સુધી ●सरमने કેન્દ્ર ઉપર ફેરવો.

∵ ચાપ सगर = ચાપ सागारा.

∴ र, रा માં મળી જશે.

∴ कस, कासा માં અને कर, कारा માં મળી જશે.

∴ ∠ सकर = ∠ साकारा.

મનોયત્ન ૩૦

૧. એકજ વર્તુલમાં સિદ્ધાન્તનું સત્ય સાબીત કરો.

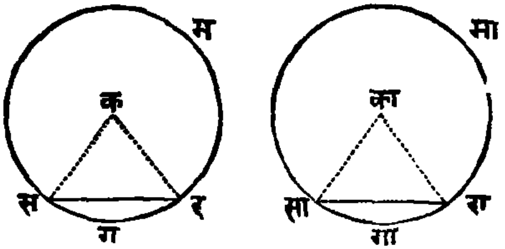
૨. સમાન વર્તુલો (વા એકજ વર્તુલ) માં કેન્દ્ર આગળના ખૂણા વિષમ હોય, તો મોટો ખૂણુ મોટા ચાપથી અંતરાયેલો છે.

સિદ્ધાન્ત ૩૧

સમાન વર્તુલોમાં (વા એકજ વર્તુલમાં),

(૧) બે જીવાઓ સમાન હોય, તો તે સમાન ચાપો કાપે છે;

(૨) બે ચાપો સમાન હોય, તો તેમની જીવાઓ સમાન છે



૧. પક્ષ સरम અને सारामा સમાન વર્તુલો છે. તેમનાં કેન્દ્રો क, का છે. જીવા सर = જીવા सारा.

સાધ્ય : ચાપ सगर = ચાપ सागारा અને ચાપ समर = ચાપ सामारा.

રચના : कस, कर, कासा, कारा જોડો.

સાબીતી : △ઓ सकर અને साकारा માં

सर = सारा પક્ષ.

सक = साका } સમાન વર્તુલોની ત્રિજ્યાઓ.
रक = राका }

∴ △सकर ≡ △साकारा

∴ ∠ सकर = ∠ साकारा

∴ ચાપ सगर = ચાપ सागारा

અને ⊙ सरम નો પરિઘ = ⊙ सारामा નો પરિઘ

∴ બાકીનો ચાપ समर = બાકીનો ચાપ सामारा

૨. પક્ષ: ચાપ सगर = ચાપ सागारा.

સાધ્ય : જીવા सर = જીવા सारा.

રચના : कस, कर, कासा, कारा જોડો.

સાબીતી : ∵ ચાપ सगर = ચાપ सागारा પક્ષ.

∴ ∠ सकर = ∠ साकारा.

∴ △ઓ सकर અને साकारा માં

कस = कासा } સમાન વર્તુલોની ત્રિજ્યાઓ.
कर = कारा

અં. ∠ सकर = અં. साकारा સાબીત કર્યું.

∴ △सकर ≡ △साकारा.

∴ જીવા सर = જીવા सारा.

મનોયત્ન ૩૧

૧. એકજ વર્તુલમાં સિધ્ધાન્તનું સત્ય સાબીત કરો.

૨. સમાન વર્તુલો (વા એકજ વર્તુલ) માં સમાન જીવાઓ કેન્દ્રો આગળ સમાન કોણો આંતરે છે.

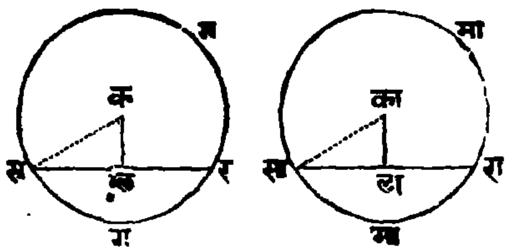
૩. બે વર્તુલોની બે સમાન જીવાઓ કેન્દ્રો આગળ સમાન કોણો આંતરે તો, તે વર્તુલો સમાન છે.

સિદ્ધાન્ત ૩૨.

સમાન વર્તુલો (વા એકજ વર્તુલમાં)

૧. સમાન જીવાઓ વર્તુલોના કેન્દ્રોથી સમાન અન્તરે છે;

૨. વર્તુલના કેન્દ્રોથી સમાન અન્તરે આવેલી જીવાઓ સમાન છે.



૧. પક્ષ : સરમ અને સારામા સમાન વર્તુલો છે. सर = सारा જીવાઓ અને क અને का કેન્દ્રો છે.
कल ⊥ सर અને काला ⊥ सारा.

સાધ્ય : कल = काला.

રચના : सक, साका જોડો.

સાબીતી : सल = लर ∵ कल ⊥ सर

∴ सल = ½सर

તેવીજ રીતે साला = ½ सारा

પણ सर = सारा

∴ सल = साला

કા. ખુ. △ ઓ कलस અને कालासा માં.
કર્ણ सक = કર્ણ साका ∵ સમાન ⊙ની ત્રિજ્યાઓ
सल = साला સાબીત કર્યું.
∴ △ कलस ≡ △ कालासा
∴ कल = काला.

૨. પક્ષ : कल = काला

સાધ્ય : सर = सारा

સાબીતી : કા. ખુ. △ ઓ कलस અને कालासा માં.
કર્ણ सक = કર્ણ साका ∵ સમાન ⊙ની ત્રિજ્યાઓ.
कल = काला પક્ષ.
∴ △ कलस ≡ △ कालासा.
∴ सल = साला
∴ ૨ सल = ૨ साला
પણ ૨ सल = सर
અને ૨ साला = सारा
∴ सर = सारा.

મનોયત્ન ૩૨

૧. એક જ વર્તુલમાં સિદ્ધાન્તનું સત્ય સાબીત કરો.

૨. બે સમાન વર્તુલોમાં (વા એકજ વર્તુલમાં) બે જીવાઓ કેન્દ્રો આગળ સમાન કોણો બનાવે તો, તેઓ કેન્દ્રોથી સમાન અંતરે છે.

૩. બે સમાન વર્તુલોમાં (વા એક જ વર્તુલમાં) બે જીવાઓ કેન્દ્રોથી સમાન અન્તરે હોય, તો તેઓ કેન્દ્રો આગળ સમાન કોણો બનાવે છે.

૪. વર્તુલની અંદર આવેલા બિંદુમાંથી દોરવામાં આવેલી જીવાઓમાંની વ્યાસ એ મોટામાં મોટી જીવા છે.

૫. વર્તુલની અંદર આવેલા બિંદુમાં થઇને દોરાતી જીવાઓમાં જે જીવા વ્યાસને કાટખુણે હોય તે નાનામાં નાની જીવા છે.

૬. **प**, **घ**, બે સમાન વર્તુલોનાં કેન્દ્રો છે. વર્તુલોને **स**, **र**, **ग**, **म**, માં મળે તેવી રીતે **पघ** ના મધ્ય બિંદુમાંથી **सरगम** રેખા દોરી છે. સાબીત કરો: **सर** = **गम**.

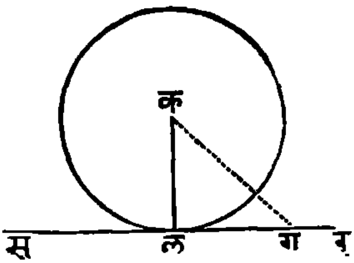
૭. એક વર્તુલની બે સમાન જીવાઓનાં **प** અને **घ** મધ્યબિંદુઓ છે. **पघ** જોડી તેને લંબાવવાથી તે વર્તુલને **न**, **स** માં મળે છે. સાબીત કરો: **पन** = **घस**.

૮. બે જીવાઓ વર્તુલના કેન્દ્રોથી વધારે ઓછા અંતરે હોય તો નજીકની જીવા દૂરની જીવા કરતાં મોટી છે.

૯. બે વિષમ જીવાઓમાંની મોટી જીવા નાની કરતાં કેન્દ્રથી ઓછા અંતરે છે.

સિદ્ધાન્ત ૩૩

વર્તુલના કોઇ પણ બિંદુ આગળ દોરેલી *સ્પર્શરેખા અને †સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલી ત્રિજ્યા પરસ્પર લંબ છે.



પક્ષ : क કેન્દ્રવાળા ⊙ને सर, ल આગળ સ્પર્શ કરે છે.

સાધ્ય : कल ⊥ सर.

રચના : सर ઉપર ल સિવાય કોઇ એક ग બિંદુ લ્યો. कग જોડો.

સાબીતી : सर સ્પર્શરેખા હોવાથી ल સિવાયનું सर ઉપરનું દરેક બિંદુ વર્તુલની બહાર છે.

∴ ત્રિજ્યા कल < कग.

આ જ રીતે कल < क માંથી सर ઉપર દોરેલી કોઇ પણ સુરેખા.

∴ कમાંથી सर ઉપરની રેખાઓમાં कल નાનામાં નાની છે.

∴ कल ⊥ सर.

---

* જે સુરેખા ગમે તેટલી લંબાવવા છતાં વર્તુલને ફક્ત એક જ બિંદુમાં મળે છે તેને વર્તુલની **સ્પર્શરેખા** કહે છે.

† જે બિંદુમાં સ્પર્શરેખા વર્તુલને સ્પર્શ કરે છે તેને **સ્પર્શબિંદુ** કહે છે.

ઉપસિદ્ધાન્તો

(૧) પરિઘ ઉપર આવેલા એક બિંદુ આગળ વર્તુલને ફક્ત એક જ સ્પર્શરેખા દોરી શકાય.

(૨) વર્તુલના વ્યાસને ગમે તે એક છેડે દોરેલ લંબ વર્તુલની સ્પર્શરેખા છે.

(૩) સ્પર્શ બિંદુમાંથી સ્પર્શરેખાને દોરેલો લંબ કેન્દ્રમાં થઈને પસાર થાય છે.

(૪) કેન્દ્રમાંથી સ્પર્શરેખાને દોરેલો લંબ સ્પર્શબિંદુમાં થઈને પસાર થાય છે.

મનોયત્ન ૩૩

૧. વ્યાસના છેડાઓ આગળ ⊙ ને દોરેલ સ્પર્શરેખાઓ ‖ છે.

૨ એક સુરેખા ⊙ ને એક જ બિંદુ આગળ સ્પર્શ કરે.

૩. क કેન્દ્રવાળા વર્તુલની सग, सर, સ્પર્શરેખાઓ છે. સાબિત કરો : $\angle$ रकग + $\angle$ रसग = ૧૮૦°

૪. કોઈ પણ બહારના બિંદુમાંથી ⊙ને દોરવામાં આવેલી સ્પર્શરેખાઓ (ક.) સમાન છે, (ખ.) કેન્દ્ર અને બહારના બિંદુને જોડનાર રેખા સાથે તેઓ સમાન કોણો બનાવે છે, અને (ગ.) કેન્દ્ર આગળ તેઓ સમાન કોણો બનાવે છે.

૫. કોઈ પણ ચતુષ્કોણમાં અંતર્ગત વર્તુલ દોરી શકાય તો સામેની ભુજાઓની એક જોડનો સરવાળો બીજી જોડના સરવાળા બરાબર છે.

૬. બે વર્તુલો પરસ્પર બે બિંદુઓમાં છેદે તો તેમનાં કેન્દ્રોને જોડનારી રેખા સામાન્ય જીવાને કાટખુણે દુભાગે છે.

૭. સમભુજ ચતુષ્કોણના વિકર્ણોનું છેદન બિંદુ એ તેના અંતર્ગત વર્તુલનું કેન્દ્ર છે.

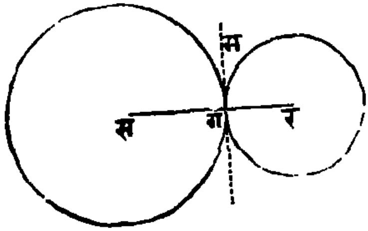
૮. આપેલી સુરેખાને આપેલા બિંદુ આગળ સ્પર્શ કરતા વર્તુલના કેન્દ્રનું નિધાન શોધી કહાડો.

૯. આપેલી સુરેખાને સ્પર્શ કરતા આપેલી ત્રિજ્યાના વર્તુલના કેન્દ્રનું નિધાન શોધી કહાડો.

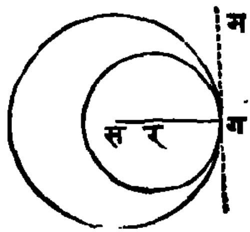
૧૦. આપેલી બે સમાન સુરેખાઓને સ્પર્શ કરતા વર્તુલના કેન્દ્રનું નિધાન શોધી કહાડો.

સિદ્ધાન્ત ૩૪

બે વર્તુલો પરસ્પર સ્પર્શ કરે તો તેમનાં કેન્દ્રો અને સ્પર્શબિંદુ એક જ સુરેખામા આવે .



આ. ૧



આ. ૨

પક્ષ : स અને र કેન્દ્રવાળાં બે વર્તુલો ग આગળ સ્પર્શ કરે છે.

સાધ્ય : स,र,ग, એક જ સુરેખામાં છે.

રચના : मग સામાન્ય સ્પર્શરેખા દોરો. सग, रग જોડો.

સાબીતી : ∠ सगम કા. ખુ. ∵ सग ત્રિજ્યા અને गम સ્પ. રે.

આજ રીતે ∠ रगम પણ કા. ખુ. છે.

∴ ∠ सगम + ∠ रगम = ૨ કા. ખુ.

∴ स,ग,र, એક જ સુરેખામાં છે.

ઉપસિદ્ધાન્તો :

૧. બે ¶બાહ્યસ્પર્શીવર્તુલોનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર તેમની ત્રિજ્યાઓના સરવાળા બરાબર છે.

૨. બે ¶અંતઃસ્પર્શીવર્તુલોનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર તેમની ત્રિજ્યાઓના તફાવત બરાબર છે.

મનોયત્ન ૩૪

૧. स અને र કેન્દ્રવાળાં બે વર્તુલોના સ્પર્શબિંદુમાં થઇને પરીધિને અનુક્રમે प અને घ બિંદુમાં મળે તેવી રીતે એક સુરેખા દોરી હોય તો सप ત્રિજ્યા, रघ ત્રિજ્યાને સમાન્તર થાય.

૨. બાહ્યસ્પર્શી વર્તુલોના સ્પર્શબિંદુમાંથી બન્ને બાજુ પરિધિ-ને મળે તેવી રીતે એક રેખા દોરી હોય તો તે રેખાના છેડાઓ આગળ દોરેલી સ્પર્શરેખાઓ સમાન્તર છે.

૩. આપેલા વર્તુલને સ્પર્શ કરનાર આપેલી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુલના કેન્દ્રનું નિધાન શોધી કહાડો.

૪ આપેલા વર્તુલને આપેલા એક બિંદુ આગળ સ્પર્શ કરતા વર્તુલના કેન્દ્રનું નિધાન શોધી કહાડો.

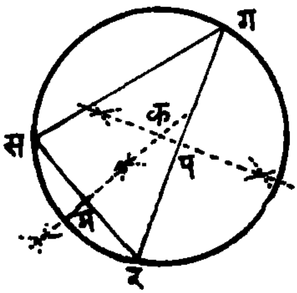
૫. બે બાહ્યસ્પર્શી સમાન વર્તુલોને સ્પર્શ કરનાર ત્રીજા વર્તુલના કેન્દ્રનું નિધાન શોધી કહાડો.

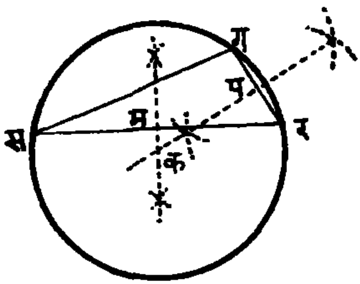
૬. બે બાહ્યસ્પર્શી સમાન વર્તુલોના સ્પર્શબિંદુમાંથી બન્નેના પરિધિને મળે તેવી કોઇ એક સુરેખા દોરવામાં આવી હોય તો તે સ્પર્શબિંદુ આગળ દુભાગાય છે.

¶ જે વર્તુલો આ. ૧ પ્રમાણે **બહાર** સ્પર્શ કરે છે તેમને **બાહ્યસ્પર્શી** અને આ. ૨ પ્રમાણે અંદર સ્પર્શ કરે છે તેમને **અંતઃસ્પર્શી** વર્તુલો કહે છે.

કૃત્ય ૧૭

કોઇ એક આપેલા ત્રિકોણ (सरग)નું §પરિવૃત્ત દોરવું.





રચના: सर અને रगના દુભાજક લંબ मक અને पक દોરી તેમને कમાં મળવા દ્યો. क કેન્દ્ર અને सक ત્રિજ્યા લઇ ⊙ દોરો, એટલે તે માગેલું ⊙ થશે.

સાબીતી : सक, रक, गक જોડો.

∵ सर, रगના દુભાજકલંબો मक, पक છે. રચના.

∴ सक = रक = गक. નિધાન.

∴ क કેન્દ્ર અને सक ત્રિજ્યાથી દોરેલું ⊙ र અને गમાં થઇને પસાર થાય છે.

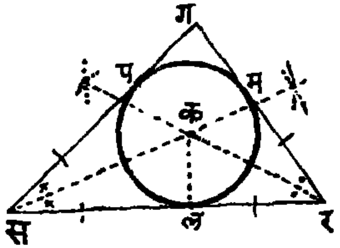
∴ सरग માગેલું ⊙ છે.

---

§ જે વર્તુલ સુરેખઆકૃતિનાં શિરોબિંદુઓમાં થઇને પસાર થાય છે તેને **પરિવૃત્ત** કહે છે.

કૃત્ય ૧૮

કોઇ એક આપેલા ત્રિકોણ (सरग)નું *અંતર્વૃત્ત દોરવું.



રચના : ∠गसर અને ∠गरसને सक અને रकથી દુભાગી દુભાજકોને कમાં મળવા દો. कल ⊥ सर દોરો. क કેન્દ્ર અને कल ત્રિજ્યા લઇ ⊙ દોરો, એટલે તે માગેલું ⊙ થશે.

સાબીતી : कम, कप ⊥ रग, सग દોરો.

∵ सक અને रक, ∠स અને ∠र ને દુભાગે છે. રચના.

∴ कल = कम = कप. નિધાન.

∴ क કેન્દ્ર અને कल ત્રિજ્યાથી દોરેલું ⊙ म અને पમાં થઇને પસાર થાય છે.

અને ∠ल, ∠म અને ∠प કા. ખુ. હોવાથી ⊙ ત્રિકોણ-ની ભુજાઓને ल, म અને प આગળ સ્પર્શ કરે છે.

∴ ⊙ लमप માગેલું ⊙ છે.

---

* જે વર્તુલને સુરેખઆકૃતિની સઘળી ભુજાઓ સ્પર્શ કરે છે તેને અંતર્વૃત્ત કહે છે.

મનોયત્ન

(કૃત્ય ૧૭, ૧૮)

૧. નીચેના માપનો એક ત્રિકોણ બનાવો અને બાકીની ભુજાઓ માપો:—

પાયો = ૬ સેમિ.: ઉંચાઇ = ૩·૬ સેમિ.: પરિવૃત્તત્રિજ્યા = ૩·૩ સેમિ.

૨. **स, र, ग** નામનાં ત્રણ ગામ એક બીજાથી ૪, ૬, ૯ માઇલને અંતરે છે. આ ગામોનાં બાળકોના અભ્યાસની અનુકૂળતા ખાતર તે ગામોથી સરખે અંતરે વિનયમંદિર બાંધવું હોય તો ક્યાં બાંધવું ? ત્યાંથી દરેક ગામનુ અંતર માપીને કહો.

૩. આપેલા * વાર્તિકચતુષ્કોણનું પરિવૃત્ત દોરો.

૪. ૩", ૪", ૪·૫" લંબાઇની ભુજાઓ વાળો એક ત્રિકોણ દોરો. તેનાં શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે આવેલું **म** બિંદુ અને ભુજાઓથી સરખે અંતરે આવેલું **प** બિંદુ શોધી કહાડો. **मप** માપો.

૫. એક ત્રિકોણાકાર બેટની ત્રણ બાજુઓ ૪, ૫ અને ૭ માઇલ લાંબી છે. ત્રણે કિનારાથી સરખે અંતરે એક બંગલો બાંધવો હોય તો તે ક્યાં બાંધવો ? કિનારાથી તેનુ અંતર કેટલું ?

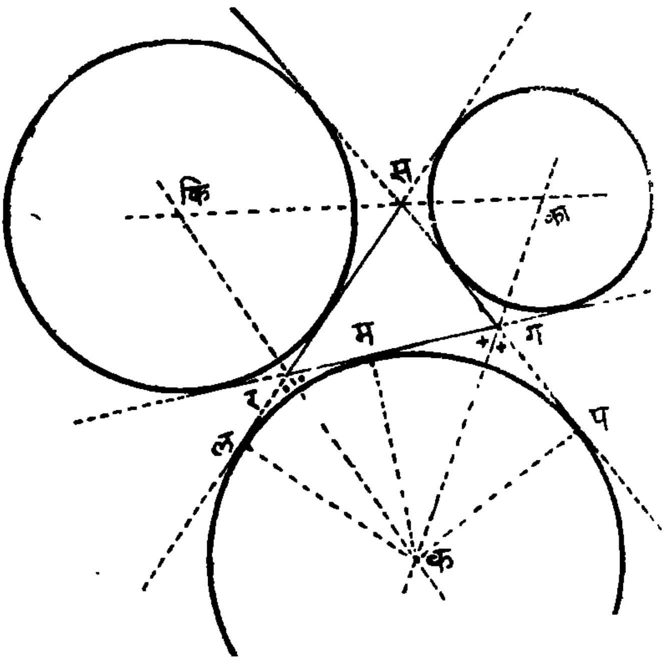
૬. **स, र, ग** કેન્દ્રો લઇ પરસ્પરસ્પર્શી ત્રણ વર્તુલો દોરો. **सर** = ૨·૬", **रग** ૩·૬", **गस** = ૪·૬".

---

* જે બહુકોણનાં શિરોબિંદુઓ એકજ વર્તુલના પરિઘ ઉપર આવે તેને **વાર્તિકબહુકોણ** કહે છે.

કૃત્ય ૧૯

કોઇ એક આપેલા ત્રિકોણ (सरग) નું બહિર્વૃત્ત દોરવું.



રચના : બાહ્યકોણો र અને ग ના દુભાજકો रक અને गक દોરી તેમને क માં મળવાદો. कल ⊥ सर દોરો. क કેન્દ્ર અને कल ત્રિજ્યા લઇ ◉ દોરો, એટલે તે માગેલું વર્તુલ થશે.

સાબીતી : कम, कप ⊥ रग, सग દોરો.

∵ रक, गक, બાહ્યકોણો र અને ग ના દુભાજકો છે. રચના.

∴ कल = कम = कप. નિધાન

∴ क કેન્દ્ર અને कल ત્રિજ્યાથી દોરેલું ⊙

म અને प માં થઇને પસાર થાય છે.

અને ∠ ल, ∠ म અને ∠ प કા. ખુ. હોવાથી ⊙ लमप

△ ની ભુજાઓને ल, म અને प આગળ સ્પર્શ કરે છે

અને તે ત્રિકોણની બહાર હોવાથી તેને બહિર્વૃત્ત કહે છે.

∴ ⊙ लमप માગેલું ⊙ છે.

સૂચના : આજ પ્રમાણે આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે બીજાં બે બહિર્વૃત્તો દોરી શકાય.

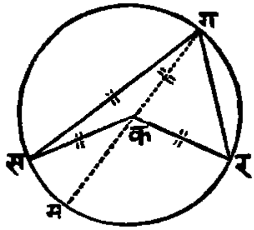
મનોયત્ન

૧. सर, रग અને गस = ૩·૩", ૫·૧" અને ૬·૨" ભુજાઓ વાળા △ सरग નાં પરિવૃત્ત, અંતર્વૃત્ત અને બહિર્વૃત્તો દોરો. બાહ્ય-કેન્દ્રોનું એકબીજાથી અંતર માપો.

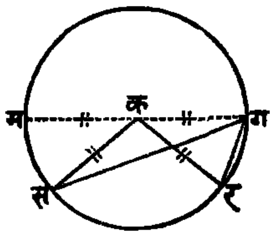
૨. ત્રણ પાકા રસ્તા પરસ્પર છેદી ૪, ૬, ૯ માઇલની બાજુ-ઓનો ત્રિકોણ બનાવે છે. ત્રણે રસ્તાઓથી સરખે અંતરે ખેતીવા-ડીના પ્રયોગો કરવા માટે ખેતર રાખવું હોય તો ક્યાં રાખવું ? રસ્તા-ઓથી તેનું અંતર કેટલું ? વધારેમાં વધારે કેટલી જગાએ આવાં ખેતર રાખી શકાય ? આ ખેતરોમાં રસ્તાઓથી નજીકમાં નજીક ખેતર કયું ?

સિદ્ધાન્ત ૩૫

વર્તુલનો ચાપ કેન્દ્ર આગળ જે કોણ બનાવે છે તે વર્તુલના બાકીના પરિધિ ઉપરના કોઇ પણ બિંદુ આગળ તે જ ચાપથી બનતા કોણથી બમણો છે.



આ. ૧



આ. ૨

પક્ષ : सरग વર્તુલનું કેન્દ્ર क છે. सर, કેન્દ્ર આગળ ∠ सकर અને બાકીના પરિધિના ग બિંદુ આગળ ∠ सगर બનાવે છે.

સાધ્ય : ∠ सकर = २ सगर

રચના : गक જોડો અને તેને म સુધી લંબાવો.

સાબીતી : ∠ कगस = ∠ कसग ∵ कग = कस ત્રિજ્યા.

∠ कगस + ∠ कसग = २ कगस

પણ બાહ્ય ∠ सकम = ∠ कगस + ∠ कसग.

∴ ∠ सकम = २ ∠ कगस

તેવીજ રીતે ∠ मकर = २ ∠ कगर

∴ આ. ૧ : ∠ सकम + ∠ मकर = २ ∠ कगस + २ ∠ कगर

આ. ૨ : ∠ मकर − ∠ सकम = २ ∠ कगर − २ ∠ कगस

∴ બન્ને આકૃતિઓમાં

∠ सकर = २ ∠ सगर

મનોયત્ન ૩૫

૧. ◉ નો ચાપ વ્યાસ લઇ સિદ્ધાન્ત સાબીત કરો.

૨. વર્તુલનો ચાપ અર્ધવર્તુલના પરિઘ કરતાં વધારે હોય તેવી એક આકૃતિ દોરી સિદ્ધાન્ત સાબીત કરો.

૩. क કેન્દ્રવાળા ◉ માં સમભુજ અંતર્ગત △ सरग દોરો. સાબીત કરો : ∠ रकग = ∠ गकस = ∠ सकर.

૪. क કેન્દ્રવાળા ◉ માં અંતર્ગત △ सरग દોરેલો છે. म, रग નું મધ્યબિંદુ છે. સાબીત કરો : ∠ रकम = ∠ स.

૫. क કેન્દ્રવાળા વર્તુલની सग અને गर જીવાઓ ૭૦° નો કોણ બનાવે છે. ∠ सकर ગણતરી કરી કહાડો.

૬. क કેન્દ્રવાળા सरग ◉ માં सक ⊥ गक ત્રિજ્યાઓ દોરી છે. सर ચાપ ઉપર કોઇ એક ग બિંદુ એવી રીતે લ્યો કે જેથી ∠ करग = ૮૦° થાય. ∠ गसक ગણતરી કરી કહાડો.

૭. સમાન ◉ઓ (વા એક જ ◉) માં જો બે જીવાઓ પરિઘ આગળ સમાન કોણો બનાવે તો તેઓ સમાન છે. વ્યત્યાસ.

૮. △ मरग ના स નો દુભાજક પરિવૃત્તના પરિઘને म માં મળે તો मर = मग.

૯. સમભુજવાર્તિકબહુકોણ સમકોણ છે.

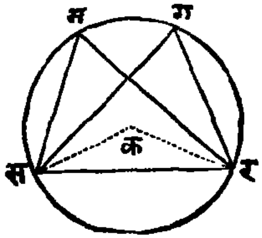
૧૦. એકજ ◉ ની ∥ જીવાઓ વચ્ચેના ચાપો સમાન છે. વ્યત્યાસ.

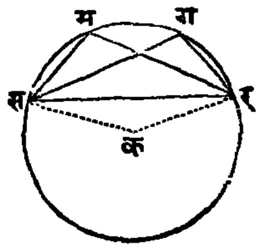
૧૧. બે વર્તુલોનાં છેદન બિંદુઓ स અને र માંથી गसम ∥ परध બન્ને બાજુ પરિઘોને મળે તેમ દોરી હોય તો गप = मध.

૧૨. બે વર્તુલોના એક છેદનબિંદુ स માંથી गसम અને पसध બન્ને બાજુ પરિઘોને મળે તેમ દોરી હોય તો गप = मध.

સિદ્ધાન્ત ૩૬

એક જ * વૃત્તખંડમાં આવેલા કોણો સમાન છે.





પક્ષ : ∠ समग અને ∠ सगर એક જ વૃત્તખંડ सरगम માં આવેલા છે. क કેન્દ્ર છે.

સાધ્ય : ∠ समर = ∠ सगर.

રચના : कस, कर જોડો.

સાબીતી : ∠ समर = ½ ∠ सकर. } ∵ પરિધ ઉપર
∠ सगर = ½ ∠ सकर. } અને કેન્દ્ર આગળ બનતા કોણો.

∴ ∠ समर = ∠ सगर.

વ્યત્યાસ : બે બિંદુઓને જોડનારી રેખા તેની એક બાજુએ બીજાં બે બિંદુઓ આગળ સમાન કોણો બનાવે તો તે ચારે બિંદુઓ વાર્તિક છે

---

* જીવા અને ચાપથી અંતરાયેલા વર્તુલના ભાગને **વૃત્તખંડ** કહે છે. અર્ધવર્તુલથી નાના ભાગને **લઘુવૃત્તખંડ** અને મોટાને **ગુરુવૃત્તખંડ** કહે છે.

ઉપસિદ્ધાન્ત : શિરઃકોણો સમાન હોય તેવા, પાયાની એક બાજુએ આવેલા, ત્રિકોણોનાં શિરોબિંદુઓ અને પાયાના છેડાઓ વાર્તિક છે.

મનોયત્ન ૩૬

૧. બે ⊙ ઓ स, र માં છેદાય અને गसम અને पसघ સુરેખાઓ બન્ને બાજુ પરિઘોને મળે તેમ દોરી હોય તો △ ઓ रगम, रपध સમકોણ છે.

૨. सर, गम બે જીવાઓ પરસ્પર प માં છેદાય છે. સાબીત કરો : △ ઓ सपम અને गपर સમકોણ છે.

૩. सरगम વાર્તિક ચતુષ્કોણ છે. સાબીત કરો:
$\angle$ स + $\angle$ ग = ૧૮૦°.

૪. सरगम વાર્તિક ચતુષ્કોણના વિકર્ણો દોરી સાબીત કરો:
$\angle$ रगम = $\angle$ सरम + $\angle$ समर.

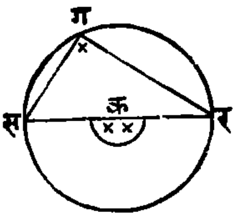
૫. બે વર્તુલો પરસ્પર स અને र માં છેદે છે. स માંથી કોઇ એક गसम રેખા બન્ને વર્તુલોને ग અને म માં મળે તેમ દોરો. गर, गम જોડો. સાબીત કરો કે गसम ગમે તેમ દોરવામાં આવે તોપણ $\angle$ गरम અચલ રહે છે.

૬. △ सरग ના र અને ग માંથી सग અને सर ઉપર रम અને गप લંબો દોર્યા હોય તો रगमप વાર્તિક છે.

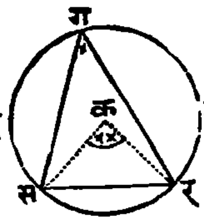
૭. क કેન્દ્રના વર્તુલની सम અને रग સમાન્તર જીવાઓ છે. જો सग અને रम વર્તુલની અંદર प બિંદુમાં છેદે તો स, र, क, प, વાર્તિક છે.

સિદ્ધાન્ત ૩૭

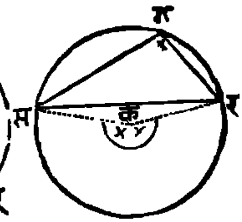
(૧) અર્ધવર્તુલમાં આવેલા કોણો કાટખુણા છે: (૨) ગુરુ વૃત્તખંડમાં આવેલો કોણ લઘુ અને (૩) લઘુ વૃત્તખંડમાં આવેલો કોણ ગુરુ છે.



આ. ૧



આ. ૨



આ. ૩

પક્ષ : (૧) स र અર્ધવર્તુલમાં ∠ सगर આ. ૧
(૨) सगर ગુરુ વૃત્તખંડમાં ∠ सगर આ ૨
(૩) सगर લઘુ વૃત્તખંડમાં ∠ सगर આ ૩

સાધ્ય : (૧) ∠ सगर કા. ખુ. છે. (આ. ૧)
(૨) ∠ सगर લઘુકોણ છે. (આ. ૨)
(૩) ∠ सगर ગુરુકોણ છે. (આ. ૩)

રચના : सक જોડી થોડીક લંબાવો અને रक જોડો.

સાબીતી : ∠ सकर કેન્દ્ર આગળ બનતા અને ∠ सगर પરિધિ આગળ બનતા કોણો છે.

∴ ∠ सगर = $\frac{1}{2}$ ∠ सकर (બધી આકૃતિઓમાં)

આ. ૧ માં ∠ सकर = ૨ કા. ખુ. ∵ સરલકોણ.

∴ ∠ सगर = ૧ કા. ખુ.

આ. ૨ માં ∠   < ૨ કા. ખુ.

∴ ∠ सगर < ૧ કા. ખુ.

∴ ∠ सगर લઘુકોણ.

આ. ૩ માં ∠ सकर > ૨ કા. ખુ.

∴ ∠ सगर > ૧ કા. ખુ.

∴ ∠ सगर ગુરુકોણ.

મનોયત્ન ૩૭

૧. કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણને વ્યાસ તરીકે લઇ દોરેલું વર્તુલ સામેના શિરોબિંદુમાં થઇને પસાર થાય છે.

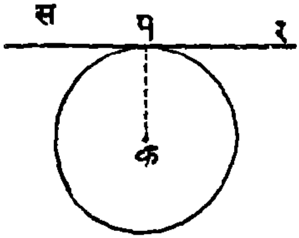
૨. કોઇ એક ● માં અંતર્ગત △ सरग દોરેલો છે. ∠ रसग લઘુકોણ હોય તો रसग વૃત્તખંડ મોટો અને ગુરુકોણ હોય તો તે નાનો છે.

૩. સમદ્વિભુજ ત્રિકોણની ભુજાઓને વ્યાસ બનાવી દોરવામાં આવેલાં વર્તુલો પાયાના મધ્યબિંદુમાં મળે છે.

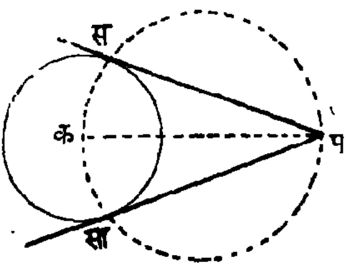
૪. કાટખુણાની ભુજાઓ ઉપર છેડાઓ રહે તેવી રીતે ખસતી એક આપેલી લંબાઇની સુરેખાના મધ્યબિંદુનું નિધાન કહાડો.

કૃત્ય ૨૦

આપેલા વર્તુલ (કેન્દ્ર क) ને આપેલા બિંદુ पમાંથી સ્પર્શરેખાઓ દોરવી.



આ. ૧



આ. ૨

૧. જો प પરિઘ ઉપર હોય તો.

રચના : कप જોડો અને सपर ⊥ कप દોરો. એટલે सपर માગેલી સ્પર્શરેખા થશે.

સાબીતી : ∠ कपस = કા. ખુ. રચના.

∴ सपर વર્તુલની માગેલી સ્પર્શરેખા છે.

૨. જો प વર્તુલની બહાર હોય તો.

રચના : कप જોડો. कप ને વ્યાસ બનાવી ● ને स અને सा માં છેદે તેવું ⊙ દોરો. पस, पसा જોડો, એટલે તે માગેલી સ્પર્શરેખાઓ થશે.

સાબીતી : कस, कसा જોડો.

कप ⊙નો વ્યાસ અને कसप, कसाप અર્ધવર્તુલો છે. રચના.

∴ ∠ कसप = ∠ कसाप = ૯૦°

∴ पस અને पसा વર્તુલની માગેલી સ્પર્શરેખાઓ છે.

સૂચના : આપેલું બિંદુ વર્તુલની અંદર હોય તો એક પણ સ્પર્શરેખા દોરાય નહિ; પરિઘ ઉપર હોય તો એક અને બહાર હોય તો બે સ્પર્શરેખાઓ દોરાય.

મનોયત્ન

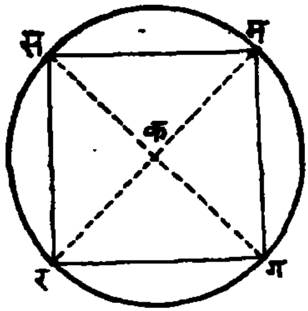
૧. ૨.૫" ત્રિજ્યાના એક વર્તુલને, કેન્દ્રથી ૩.૫" દૂર આવેલા એક બિંદુમાંથી, સ્પર્શરેખાઓ દોરો.

૨. क અને बનું અંતર ૩" છે. bમાંથી એક એવી સુરેખા દોરો કે જેની ઉપર कમાંથી દોરેલો લંબ ૧"નો હોય. कब અને માગેલી સુરેખાથી બનતો કોણ માપો.

૩. क અને बનું અંતર ૩.૫" છે. क કેન્દ્રથી દોરેલા જે વર્તુલને बમાંથી દોરેલી સ્પર્શરેખા ૨.૫" થાય તેવુ એક વર્તુલ દોરો.

કૃત્ય ૨૧

આપેલા ચોરસ सरगम નું પરિવૃત્ત દોરવું.



રચના : सग, रम જોડો અને તેમને क માં છેદવાદો. કેન્દ્ર क અને ત્રિજ્યા कस લઈ ⊙ દોરો, એટલે તે માગેલું ⊙ થશે.

સાબીતી : ચોરસના કર્ણો સમાન છે અને તેઓ પરસ્પર દુભાગે છે.

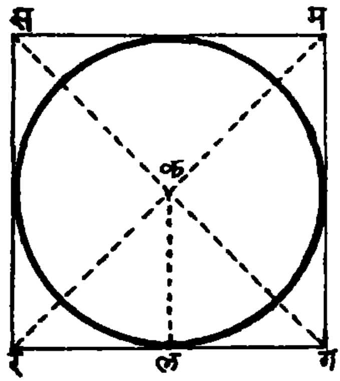
∴ कस = कर = कग = कम.

∴ कस ત્રિજ્યાથી દોરેલું ⊙ ચોરસનાં સઘળાં શિરોબિંદુઓમાં થઈને પસાર થશે.

∴ सरगम માગેલું ⊙ છે

કૃત્ય ૨૨

આપેલા ચેારસ सरगम નું અંતર્વૃત્ત દોરેા.



રચના : सग, रम જોડેા અને તેમને क માં છેદવા દો. कમાંથી रग ઉપર कल લંબ દોરેા. કેન્દ્ર क અને ત્રિજ્યા कल લઇ ◉ દોરેા, એટલે તે માગેલું ◉ થશે.

સાબીતી : ચેારસના કર્ણો તેના કેાણેાને દુભાગે છે.

∴ क તેની ભુજાએાથી સમાન અંતરે છે. નિધાન.

∴ कल ત્રિજ્યાથી દોરેલ ◉ ચેારસની ભુજાએાને સ્પર્શ કરે છે.

∴ તે માગેલું ◉ છે.

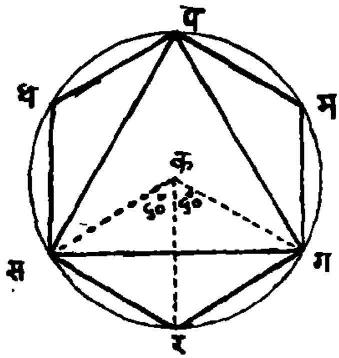
મનેાયત્ન

૧. ૨" ભુજાવાળા ચેારસનાં પરિવૃત્ત અને અંતર્વૃત્ત દોરેા અને તેમની ત્રિજ્યાએા માપેા.

૨. ૨·૫" ત્રિજ્યાના ગેાળ ટેબલને ઢાંકવા નાનાંમાં નાના ચેારસ ટુકડાની એક બાજુની લંબાઇ કેટલી જોઇએ ?

કૃત્ય ૨૩

આપેલા વર્તુલ કેન્દ્ર क માં અંતર્ગત નિયમિત ષટ્કોણ અને સમભુજ ત્રિકોણ દોરવા.



રચના : પરિધ ઉપર કોઈ એક स બિંદુ લ્યો. सर = रग = गम = मप = पध = વર્તુલની ત્રિજ્યા, લઈ જીવાઓ દોરો એટલે सरगमपध નિયમિત ષટ્કોણ બનશે અને सगप અને रमध સમભુજ ત્રિકોણ બનશે.

સાબીતી : कस, कर, कग, कम, कप, कध જોડો.

$\triangle$ ઓ कसर, करग, વગેરે સમભુજ છે. રચના.

$\therefore$ $\angle$ सकर = $\angle$ रकग, વગેરે = ૬૦°

$\therefore$ $\angle$ धकस = ૩૬૦°–૫ × ૬૦° = ૬૦°

$\therefore$ $\triangle$ धकस સમભુજ છે.

$\therefore$ धस = सर = रग, વગેરે $\because$ દરેક = ત્રિજ્યા. રચના

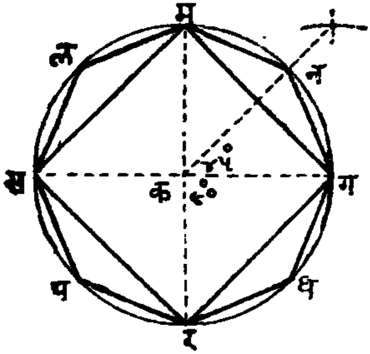
$\therefore$ सरगमपध સમભુજ છે.

વળી $\because$ $\triangle$ઓ सकर, करग સમભુજ છે. સાબીત કર્યું.
$\therefore$ $\angle$सरग = $\angle$रगम = $\angle$गमप = $\angle$मपध = ૧૨૦°
$\therefore$ सरगमपध સમકોણ પણ છે અને તેથી તે નિયમિત છે.
હવે $\because$ $\triangle$ઓ कसर, करग સમભુજ છે. સાબીત કર્યું
$\therefore$ $\angle$सकग = $\angle$गकप = पकस = ૧૨૦°
$\therefore$ सग = गप = पस.
$\therefore$ $\triangle$सगप સમભુજ છે.

તેવીજ રીતે $\triangle$रमध પણ સમભુજ છે.

કૃત્ય ૨૪

આપેલા વર્તુલ (કેન્દ્ર क) માં અંતર્ગત ચોરસ અને નિયમિત અષ્ટકોણ દોરો.



રચના : मकर અને सकग વ્યાસો કાટખુણે દોરો. गम, मस, सर, रग ચાપોને न, ल, प, घ, માં દુભાગો એટલે सरगम ચોરસ અને सपरधगनमल નિયમિત અષ્ટકોણ થશે.

સાબીતી : અર્ધવર્તુલમાં આવેલા કોણો કા. ખુ. હોવાથી सरगम ના સઘળા કોણો કા. ખુ. છે.

∴ सरगम લંબચોરસ છે.

અને ∠ सकर = ∠ रकग = ∠ गकम = मकस = ૯૦° રચના

∴ सर = रग = गम = मस;

∴ सरगम ચોરસ છે.

હવે गन = नम = मल = लस, વગેરે રચના.

∴ અષ્ટકોણ સમભુજ છે.

અને તેનો દરેક કોણ = ૨ ∠ कगन

= ૧૮૦° − ૪૫°

= ૧૩૫°

∴ અષ્ટકોણ સમકોણ પણ છે અને તેથી તે નિયમિત છે.

મનોયત્ન

૧. ૨" ત્રિજ્યાના વર્તુલમાં નિયમિત ષટ્કોણ અને સમભુજ ત્રિકોણ દોરો.

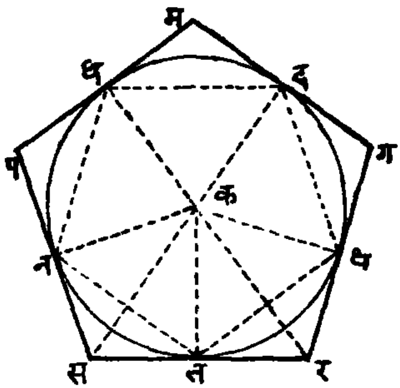
૨. ૨·૩" સુરેખા ઉપર સમભુજ પટ્કોણ દોરો.

૩. ૪ સેમિ. ત્રિજ્યાના વર્તુલમાં એક શિરોબિંદુ સામાન્ય આવે તેવા સમભુજ ત્રિકોણ અને ચોરસ દોરો.

૪. ૫ સેમિ. ત્રિજ્યાના વર્તુલમાં નિયમિત અષ્ટકોણ દોરો અને તેની ભુજા માપો.

૫. ૨" પાયા ઉપર નિયમિત અષ્ટકોણ દોરો અને પરિવૃત્તની ત્રિજ્યા માપો

સૂચના: આપેલા વર્તુલમાં ગમે તેટલી ભુજાઓનો નિયમિત બહુકોણ દોરવાને કેન્દ્ર આગળના ૩૬૦° ના કોણના તેની બાજુઓ જેટલા સમાન ભાગ કરો. આ ભાગ કરનારી રેખાઓ પરિધમાં જે બિંદુઓમાં મળે તે માગેલા બહુ કોણનાં શિરોબિંદુઓ થશે. ઉદાહરણ તરીકે નિયમિત પંચકોણ દોરવા માટે નીચેની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે કેન્દ્ર આગળના કોણના પાંચ સરખા ભાગ કરો. દરેક ભાગ ૭૨° નો થશે. એટલે **तथदधन** નિયમિત પચંકોણ થશે.

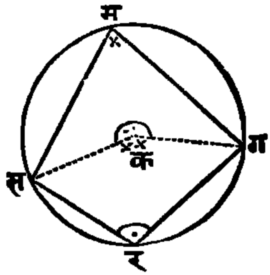


કોઇ પણ વર્તુલનો પરિગત નિયમિત બહુ કોણ દોરવાને પ્રથમ વર્તુલની અંદર માગેલી ભુજાઓનો નિયમિત બહુકોણ દોરવો અને પછી તેનાં શિરોબિંદુઓ આગળ વર્તુલની સ્પર્શરેખાઓ દોરવી. ઉપરની આકૃતિમાં **सरगमप** પરિવૃત્ત નિયમિત પંચકોણ છે.

સાબીતી આપો.

સિદ્ધાન્ત ૩૮

વાર્તિક ચતુષ્કોણના સામેના કોણો પૂરક છે,



પક્ષ : सरगम વાર્તિક ચતુષ્કોણ છે. क વર્તુલનું કેન્દ્ર છે.

સાધ્ય : ∠ म + ∠ र = ૨ કા. ખુ.
∠ स + ∠ ग = ૨ કા. ખુ.

રચના : कस, कग જોડો.

સાબીતી : ∠ म પરિધ ઉપર = $\frac{1}{2}$ ∠ सकग કેન્દ્ર આગળ.
∠ र પરિધ ઉપર = $\frac{1}{2}$ અતિદ્વિ. કા. ∠ सकग કેન્દ્ર આગળ.
∴ ∠ म + ∠ र = $\frac{1}{2}$ ∠ सकग + $\frac{1}{2}$ અતિદ્વિ. કા. ∠ सकग
= $\frac{1}{2}$ (∠ सकग + અતિદ્વિ કા. ∠ सकग.)
= $\frac{1}{2}$ (૪ કા. ખુ.)
= ૨ કા. ખુ.

તેવી જ રીતે कर અને कम જોડીને ∠ स + ∠ ग = ૨ કા ખુ. સાબીત કરી શકાય.

વ્યત્યાસ : ચતુષ્કોણના સામેના કોણોની એક જોડ પૂરક હોય, તો તે વાર્તિક છે.

ઉપસિદ્ધાન્ત :

૧. વાર્તિક ચતુષ્કોણની એક ભુજા લંબાવી હોય તો, બાહ્યકોણ = અંતર્ગતકોણની સામેનો કોણ.

૨. ચતુષ્કોણની એક ભુજા લંબાવવાથી બાહ્યકોણ અંતર્ગતકોણની સામેના કોણ બરાબર થતો હોય તો, ચતુષ્કોણ વર્તિક છે.

મનોયત્ન ૩૮

૧. **सरगम** વાર્તિક ચતુષ્કોણ છે. જો (ક) ∠ **स** =૨ ∠ **ग** (ખ) ∠ **स** = ૫ ∠ **ग**, (ગ) ∠ **स**–∠ **ग** = ૩૦° હોય તો ∠ **स** અને ∠ **ग** ગણતરી કરી કહાડો.

૨. એક વર્તુલમાં અંતર્ગત સમદ્વિભુજ △**मरग** દોરેલો છે. શિરઃકોણ **स** = ૩૦°, **सग** ચાપ ઉપર **म** કોઇ એક બિંદુ છે. ∠ **समग** કેટલો ?

૩. **कचटत** વાર્તિકચતુષ્કોણની **कत** અને **चट** ભુજાઓ લંબાવવાથી **प** માં મળે તો △ઓ **कचप, टतप** સમકોણ છે.

૪. **कचटत** વાર્તિક ચતુષ્કોણની **कत** અને **चट** ભુજાઓ લંબાવવાથી **प** માં મળે તો **कच**‖**तट**.

૫. સમાન્તરચતુષ્કોણ વાર્તિક હોય તો તે લંબચોરસ હોવો જોઇએ અને તેના વિકર્ણોનું છેદનબિંદુ તેના પરિવૃત્તનું કેન્દ્ર હોવું જોઇએ.

૬. સઘળા સમદ્વિભુજસમલંબચતુષ્કોણો વાર્તિક છે.

૭. બે વર્તુલોનાં છેદનબિંદુઓ **प**, **घ**, માં થઈને **सपर**, **गघम** બન્ને વર્તુલોના પરિઘોને બન્ને બાજુ મળે તેમ દોરી હોય તો, **सग॥रम**.

૮. **सरग** ત્રિકોણનું લંબસંગમબિંદુ **ल** અને **म**, **प**, **घ**, અનુક્રમે **स**, **र**, **ग**, માંથી સામેની ભુજાઓ ઉપર દોરેલા લંબોના પાદો હોય, તો સાબીત કરો : **रघलम**, **गमलप**, **सपलम** વાર્તિક ચતુષ્કોણો છે.

૯. **कच**, **कट** સમદ્વિભુજત્રિકોણની સમાન ભુજાઓ **चत** = **कच** અને **टप** = **कट** થાય તેમ **त** અને **प** સુધી લંબાવી હોય તો **चतपट** વાર્તિક ચતુષ્કોણ છે.

૧૦. **क**, △**सरग**નું અંતઃકેન્દ્ર અને **रग** ને સ્પર્શ કરતા બાહ્ય-વર્તુલનું કેન્દ્ર **का** હોય તો **र**, **क**, **ग**, **का**, વાર્તિક છે.

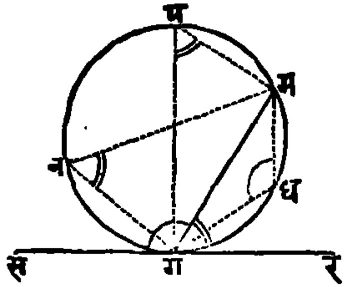
૧૧. બહિર્વક્ર ચતુષ્કોણના અંતઃકોણોના દુભાજકો વાર્તિક ચતુ-કોણ બનાવે છે.

૧૨. **क** કેન્દ્ર વાળા ⊙ ની **चट॥तप** જીવાઓ છે. **चत** અને **टप** લંબાવવાથી **म** માં મળે છે. સાબીત કરો: **च**, **म**, **प**, **क**, વાર્તિક છે.

૧૩. કોઇ પણ ત્રિકોણના લંબો એકબિંદુગામી છે.

સિદ્ધાન્ત ૩૯

વર્તુલના સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલી જીવા સ્પર્શરેખા સાથે જે કોણો બનાવે છે તે કોણો એકાન્તરવૃત્તખંડમાંના કોણો બરાબર છે.



પક્ષ : सर, વર્તુલને ग આગળ સ્પર્શ કરે છે. गम જીવા ग સ્પર્શ બિંદુમાંથી દોરેલી છે.

સાધ્ય : ∠ रगम = ∠ गनम; ∠ सगम = ∠ गधम.

રચના : ग માંથી गप વ્યાસ દોરો. गधम ચાપ ઉપર ध કોઇ એક બિંદુ અને गनम ચાપ ઉપર न કોઇ એક બિંદુ લ્યો. पम, मध, धग, गन અને नम જોડો.

સાબીતી : ∠ गमप = કા. ખુ. ∵ गप વ્યાસ, રચના.

∴ ∠ मगप + ∠ गपम = કા. ખુ.

અને ∠ रगप = કા. ખુ ∵ सगर સ્પ. રે. અને गप વ્યાસ.

∴ ∠ रगप = ∠ रगम + ∠ मगप = ∠ मगप + ∠ गपम

∴ ∠ रगम = ∠ गपम

અને ∠ गपम = ∠ गनम ∵ એકજ વૃત્તખંડમાં.

∴ ∠ रगम = ∠ गनम એકાન્તરવૃત્તખંડમાંનો કોણ.

વળી ∠ रगम + ∠ सगम = બે કા. ખુ. ∵ सर સુરેખા

અને गघम + गनम = બે કા. ખુ. ∵ नगघम ચાર્તિક

∴ ∠ रगम + ∠ सगम = ∠ गघम + ∠ गनम.

પણ ∠ रगम = ∠ गनम

∴ ∠ गनम + ∠ सगम = ∠ गघम + ∠ गनम.

∴ ∠ सगम = ∠ गघम એકાન્તરવૃત્તખંડમાંનો કોણ.

વ્યત્યાસ : વર્તુલની જીવાના એક છેડામાંથી દોરેલી સુરેખા જીવા સાથે એકાન્તરવૃત્તખંડમાંના કોણ સમાન કોણ બનાવે તો તે વર્તુલની સ્પર્શરેખા છે.

મનોયત્ન ૩૯

૧. સિદ્ધાન્તની આકૃતિમાં ∠ रगम = ૭૩° હોય તો બાકીના કોણો કેટલા હોય?

૨. બહારના બિંદુમાંથી વર્તુલને દોરેલી સ્પર્શરેખાઓ સમાન છે એ આ સિદ્ધાન્તનો ઉપયોગ કરીને સાબીત કરો.

૩. બાહ્યસ્પર્શી બે વર્તુલોના સ્પર્શબિંદુ सમાં થઇને બન્ને છેડા પરિધમાં મળે તેવી रसग અને मसप રેખાઓ દોરવામાં આવી છે. સાબીત કરો કે रम ∥ गप.

૪. અન્તઃસ્પર્શી બે વર્તુલોના સ્પર્શબિંદુ सમાંથી सरग અને समप જીવાઓ દોરવામાં આવી હોય તો रम ∥ गप.

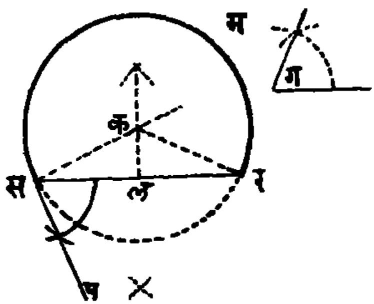
૫. જો બે વર્તુલો પરસ્પર છેદે, તો સામાન્ય સ્પર્શરેખા છેદનબિંદુઓ આગળ જે કોણો આંતરે ને પૂરકકોણો છે.

૬. બે અંતઃસ્પર્શી વર્તુલોને છેદનારી એક સુરેખાના વર્તુલોની વચ્ચે આવેલા ખંડો સ્પર્શબિંદુ આગળ સમાન કોણો બનાવે છે.

૭. બે બાહ્યસ્પર્શી વર્તુલોને છેદનારી રેખા એકને सम અને બીજાને रग માં છેદે તો सर, गम સ્પર્શબિંદુ આગળ પૂરક કોણો આંતરે છે.

કૃત્ય ૨૫

આપેલી સુરેખા सर ઉપર આપેલા ∠ग સમાન કોણ પરિધ ઉપર આંતરે તેવો વૃત્તખંડ દોરવો.



રચના : सर નો દુભાજક લંબ लक દોરો. सर ઉપર स આગળ ∠ रसप = ∠ ग બનાવો. स માંથી सक ⊥ सप દોરો અને लकને कમાં મળવા દો. क કેન્દ્ર અને कस ત્રિજ્યા લઇ ⊙ દોરો એટલે सरम માગેલો વૃત્તખંડ થશે.

સાબીતી : सक = रक ∵ कल, सरને દુભાગનાર લંબ છે.

∴ क કેન્દ્ર અને सर ત્રિજ્યાથી દોરેલ ⊙ रમાં થઇને જાય છે.

∵ सक ⊥ सप — રચના.

∴ सप વર્તુલને સ્પર્શ કરે છે અને सर ⊙ ની જીવા બને છે.

∴ ∠ रसप = सरम વૃત્તખંડમાં આવેલો ગમે તે કોણ.

પણ ∠ रसप = ∠ ग

∴ વૃત્તખંડ सरम માં આવેલો ગમે તે કોણ = ∠ ग.

∴ सरम માગેલો વૃત્તખંડ છે.

મનોયત્ન

૧. ૨" સુરેખા પરિઘ ઉપર કો.ખુ. આંતરે તેવો એક વૃત્તખંડ દોરો.

૨. આપેલા વર્તુલમાંથી આપેલો કોણ આંતરે તેવો વૃત્તખંડ કાપો.

૩. આપેલા વર્તુલમાં આપેલા ત્રિકોણના સમાન કોણોવાળો અંતર્ગત ત્રિકોણ દોરો.

૪. નીચેના માપના ત્રિકોણો દોરો અને બાકીની ભુજાઓ અને કોણો માપો:

(ક) પાયો=૨.૫", શિરઃકોણ=૬૦° અને એક ભુજ=૧.૨".

(ખ) પાયો=૪ સેમિ., શિરઃકોણ=૭૫° અને શિરોબિંદુમાંથી પાયા ઉપર દોરેલા લંબના પાદનું પાયાના કોઈ એક છેડાથી અંતર = ૧.૧ સેમિ.

(ગ) પાયો = ૨.૯", શિરઃકોણ = ૧૨૫° અને ઊંચાઈ = ૬"

(ઘ) પાયો=૬ સેમિ., શિરઃકોણ=૫૦°, ક્ષેત્રફળ=૯ ચો. સેમિ.

(ચ) પાયો અને શિરઃકોણ આપેલા હોય તેવો વધારેમાં વધારે ક્ષેત્રફળવાળો.

(છ) પાયો = ૫ સેમિ., શિરઃકોણ = ૫૫°, પાયાને દુભાગનાર મધ્યગા = ૩.૬ સેમિ.

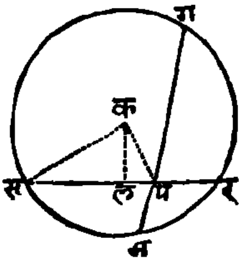
(જ) रग = ૧.૭", ∠ स = ૩૫°, ∠ स નો દુભાજક र થી ૧" દૂર પાયાને મળે.

(ઝ) પાયો = ૩.૪", શિરઃકોણ = ૫૫°, પાયાના એક છેડામાંથી દોરેલી મધ્યગા = ૨.૨".

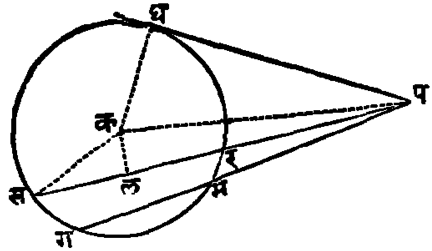
(ટ) પાયો = ૨.૮", શિરઃકોણ = ૩૫°, પાયાના કોઈ એક છેડામાંથી સામેની ભુજા ઉપર દોરેલો લંબ = ૨".

સિદ્ધાન્ત ૪૦

એક જ વર્તુલની બે જીવાઓ વર્તુલની અંદર વા બહાર પરસ્પર છેદે તો એકના ખંડોથી બનેલો લંબચોરસ બીજાના ખંડોથી બનેલા લંબચોરસ બરાબર છે.



આ. ૧



આ. ૨

૧. આકૃતિ ૧ માં જીવાઓ ⊙ ની અંદર મળે છે.

પક્ષ : सरम ⊙ ની सर અને गम જીવાઓ प માં છેદે છે.

સાધ્ય : सप.पर = गप.पम

રચના : क કેન્દ્રમાંથી कल, सर ને લંબ દોરો એટલે सल=लर થશે. सक, पक જોડો.

સાબીતી :

सप.पर = (सल+लप) (लर–लप)

= (सल+लप) (सल–लप) ∵ सल=लर રચના.

= सल૨ – लप૨

= (सक૨–लक૨)–(पक૨–लक૨) પીથેગોરસ

= सक૨ – पक૨

= ત્રિજ્યા૨ – पक૨

આજ રીતે गप.पम = ત્રિજ્યા૨ – पक૨ સાબીત થાય.

∴ सप.पर = गप.पम.

૨. આકૃતિ ૨ માં જીવાઓ ◉ ની બહાર મળે છે.

પક્ષ : सरग ◉ ની सर અને गम જીવાઓ લંબાવવાથી
प માં મળે છે.

સાધ્ય : * सप.पर = गप.पम.

રચના : क કેન્દ્રમાંથી कल, सर ને લંબ દોરો એટલે सल = लर થશે. सक, पक જોડો.

સાબીતી :

सप.पर = (लप + सल) (लप – लर)
= (लप+सल) (लप–सल) ∵ सल=लर રચના
= लप२ – सल२
= (कप२–कल२) – (सक२–कल२) પીથેગોરસ.
= कप२ – सक२
= कप२ – त्रिज्या^{२}

આજ રીતે गप.पम = कप२ – त्रिज्या^{२} સાબીત થાય.

∴ सप.पर = गप.पम.

ઉપસિદ્ધાન્ત :

૧. આ. (૧) માં દરેક લંબચોરસ આપેલા બિંદુ प આગળ દુભાગાતી જીવાના અર્ધા ભાગ ઉપરના ચોરસ બરાબર છે.

૨. આ. (૨) માં पघ, ◉ ને સ્પર્શરેખા દોરી હોય તો દરેક લંબચોરસ = पघ^{२} થાય.

---

* सर જીવાના બહારથી सप, पर અને गम ના गप, पम ખંડો થાય છે.

અભ્યાસ :

૧. બે સુરેખાઓ પરસ્પર છેદે અથવા લંબાવવાથી મળે અને એકના ખંડોથી બનેલો લંબચોરસ બીજાના ખંડોથી બનેલા લંબચોરસ બરાબર થાય તો બંને રેખાઓનાં છેડાનાં બિંદુઓ વાર્તિક છે.

૨. વર્તુલની બહારના એક બિંદુમાંથી બે સુરેખાઓ એવી રીતે દોરેલી હોય કે જેમાંની એક વર્તુલને કાપે અને બીજી તેને મળે અને વર્તુલને કાપતી આખી સુરેખા અને વર્તુલની બહારના તે રેખાના ભાગથી બનેલો લંબચોરસ વર્તુલને મળનારી રેખા ઉપરના ચોરસ બરોબર હોય તો, જે રેખા વર્તુલને મળે છે તે તેની સ્પર્શરેખા છે.

મનોયત્ન ૪૦

૧. **सर**, **गम** પરસ્પર **द** બિંદુમાં છેદે છે. **सद** = ૧·૮", **दर** = ૧·૨", **गद** = ૨·૭" છે. જો स, र, ग, म વાર્તિક હોય તો **दम** ની લંબાઇ ગણત્રી કરી કહાડો.

૨. બહારના બિંદુ **ख** માંથી એક ⊙ ને **खप** સ્પર્શરેખા અને **खसर** તેના પરિધને **स** અને **र** માં મળે તેવી રીતે દોરી છે.

(ક) જો **खस** = ૦·૬" અને **खर** = ૨·૪" હોય તો **खप** ની લંબાઈ શોધી કહાડો.

(ખ) જો **खप** = ૭·૫ સેમિ. અને **खस** = ૪·૫ સેમિ હોય તો **सर**ની લંબાઇ શોધી કહાડો.

૩. પરસ્પર છેદતાં બે વર્તુલોની સામાન્ય જીવા **ट** નામના એક બિંદુ સુધી લંબાવી હોય તો **ट** માંથી બન્ને વર્તુલોને દોરેલી સ્પર્શરેખાઓ સમાન છે.

૪. પરસ્પર છેદતાં બે વર્તુલોની સામાન્ય જીવાને લંબાવી હોય તો તે વર્તુલોની સામાન્ય સ્પર્શરેખાને દુભાગે છે.

૫. सरग કાટખુણુ ત્રિકોણનો ∠ र કાટખુણો છે. र માંથી रल, કર્ણને લંબ દોરેલો છે તો સાબીત કરો:—

(ક) सल.लग = रल२

(ખ) सग.सल = सर२

(ગ) सग.गल = रग२

૬. सरग ત્રિકોણના रट અને गड લંબ પરસ્પર ह આગળ છેદે છે. સાબીત કરો:—

(ક) रह.हट = गह.हड; (ખ) सड.सर = सट.सग; (ગ) रह.रट = रड.रस; (ઘ) गह.गड = गट.गस.

૭. બે વર્તુલો પરસ્પર स અને र માં છેદે છે. ट નામનું એક બિંદુ सर લંબાવેલી રેખા ઉપર લેવામાં આવ્યું હોય અને टगम અને टपघ રેખાઓ એક વર્તુલને ग, म અને બીજાને प, घ માં છેદે તેમ દોરી હોય તો ग, म, घ. प, વાર્તિક છે.

૮ બે વર્તુલોના એક છેદનબિંદુ स માંથી गसप અને मसघ બે સુરેખાઓ દરેક વર્તુલના કેન્દ્રમાં થઇને પરિઘ સુધી દોરેલી હોય તો સાબીત કરો:—मस.सघ = गस.सप

૯. सर વર્તુલનો વ્યાસ છે. स માંથી सप એક જીવા દોરેલી છે. सरને દોરેલો લંબ सर ને ग માં અને सप ને ल માં મળે તો સાબિત કરો. सप.सल = सर. सग

૧૦. એકજ સુરેખા ઉપર स, र, ग. અને म બિંદુઓ આવેલાં છે. તે સુરેખા ઉપર प બિંદુ એવું શોધી ક્હાડો કે જેથી पस.पर = पम.पग થાય.

પ્રકીર્ણ પ્રશ્નો.

૧. △सरग ના ∠स નો દુભાજક रग ને म માં મળે છે. સાબીત કરો: म, सर અને सग થી સમાન અંતરે છે.

૨. △सरगના ∠र ના દુભાજક ઉપર प બિંદુ છે. प માંથી पध‖रग, सर ને ध માં મળે તેમ દોરી છે. સાબીત કરો: पध = धर.

૩. कचटतप પંચકોણમાં कच = चट = टत, कप = पत અને ∠क, ∠च, ∠ट, ∠त માંનો દરેક કોણ = ૨ ∠प છે તો प કેટલા અંશનો? कच = ૧" લઇ પંચકોણ દોરો અને कपની લંબાઇ ગણતરી કરી કહાડો.

૪. कचटतप નિયમિત પંચકોણ છે. कट, कत જોડો. चट, पत લંબાવી ध માં મળવાયો. △ઓ कटत અને धटत ના કોણો ગણતરી કરી કહાડો અને સાબીત કરો: △कटत ≡ △धटत.

૫. सरग સમદ્વિભુજ △માં सर = सग છે. रस, म સુધી લંબાવી सम = सर બનાવો. સાબીત કરો: ∠रगम = ૧ કા. ખુ.

૬. સમભુજ ચતુષ્કોણના વિકર્ણોનું છેદન બિંદુ તેની ભુજાઓથી સમાન અંતરે છે.

૭. △सरग ના ∠र, ∠ग ના દુભાજકો क માં મળે છે. क માં થઇને सर ને म અને सग ને प માં મળે તેમ मप‖रग દોરી છે. સાબીત કરો: मप = रम + गप.

૮. ફક્ત પટ્ટી અને પરિકર વાપરી ૪૫° નો કોણ બનાવતી मप = ૧" અને मध = ૨" સુરેખાઓ દોરો. प થી ૨" અને ध થી ૧" દૂર બિંદુઓ શોધી કહાડો.

૯. सरगम ચતુષ્કોણુમાં ∠ स + ∠ र = ∠ ग + ∠ म હોય તો તેની બે ભુજાઓ સમાન્તર હોવી જોઇએ.

૧૦. समर અને गमप પરસ્પર છેદે છે અને समगध અને रमपन સમભુજ ચતુષ્કોણો પૂરા કરેલા છે. સાબીત કરો : (ક) धन, म માં થઇને પસાર થાય છે, અને (ખ) सग॥पर.

૧૧. △सरग ની બહારની બાજુએ सर અને सग ઉપર सर मप અને सगधन ચોરસો દોરેલા છે. સાબીત કરો: रन = पग.

૧૨. △सरग માં सर ના મધ્યબિંદુ म માંથી मप॥रग દોર્યા છે. रप, ∠ र ને દુભાગી मप ને प માં મળે છે. સાબીત કરો: ∠ सपर = ૯૦°.

૧૩. ફક્ત પટ્ટી અને પરિકરથી, सर = ૨" ઉપર, શિરઃકોણુ = ૧૨૦° હોય તેવો સમદ્વિભુજ ત્રિકોણુ દોરો. गस માપો.

૧૪. સમભુજ △सरगની रग લંબાવેલી ભુજા ઉપર क બિંદુ આવેલું છે સાબીત કરો કે क થી स, र કરતાં નજીક છે.

૧૫. સમદ્વિભુજ △सरग નો શિરઃકોણુ ∠ स = ૪૫° છે અને सम અને रप સામેની ભુજાઓ ઉપર દોરેલા લંબો न માં મળે છે. સાબીત કરો: नप = पग.

૧૬. એક કોણુના ભુજો અનુક્રમે બીજા કોણુના ભુજોને લંબ હોય, તો તે કોણો સમાન વા પૂરક છે.

૧૭. मप અને पघ સુરેખાઓ ૪૫° નો કોણુ બનાવે છે मप થી ૧" અને मघ થી ૨" દૂર એક બિંદુ શોધી કહાડો.

૧૮. નીચેના માપનો સમદ્વિભુજ △सरग દોરો અને सग માપો: પરિમિતિ = ૬", શિરઃકોણુ = ૪૦°.

૧૯. सर અને गम એક વર્તુલના વ્યાસો છે. સાબીત કરો કે गर અને मर, र માંથી गम ને ‖ દોરેલી સુરેખાથી सर સાથે બનતા કોણો દુભાગે છે.

૨૦. નીચેના માપનો सरगम સમાન્તરચતુષ્કોણ દોરોઃ ક્ષેત્રફળ = ૧૬ ચો. સેમિ., सर = ૫ સેમિ., सम = ૪ સેમિ.

૨૧. △सरग ના શિરોબિંદુ स માંથી रग ઉપર ∠ रसम = ∠ सगर અને ∠ गसप = ∠ सरग થાય તેમ सम અને सप દોરેલી છે. સાબીત કરો કે स માંથી रग ઉપર દોરેલો લંબ ∠ मसप ને દુભાગે છે.

૨૨. सरगम સમાન્તરચતુષ્કોણમાં प કોઇ એક બિંદુ હોય તો શિરોબિંદુઓથી તેનાં અંતરોનો સરવાળો તેના વિકર્ણોના સરવાળાથી વધારે પણ તેની પરિમિતિથી ઓછો છે.

૨૩. म અને प, △सरग ની सर અને सग ભુજાઓનાં મધ્યબિંદુઓ છે. सल ⊥ रग છે. સાબીત કરોઃ △समप ≡ △लमप.

૨૪. △सरग માં न એક બિંદુ છે. न માંથી नम, नप, नध અનુક્રમે रग, गस, અને सर ને દોરેલા લંબો છે. સાબીત કરોઃ
$रम^2 + गप^2 + सध^2 = मग^2 + पस^2 + धर^2$.

૨૫. कचटत ચતુષ્કોણમાં ∠ क = ∠ च, ∠ ट = त હોય, તો कत = चट.

૨૬. कचटत ચતુષ્કોણમાં कच = टत. लम, लप અનુક્રમે चट અને कत ને કાટખુણે દુભાગે છે. સાબીત કરોઃ △लकच ≡ △लतट.

૨૭. सर સુરેખા ग આગળ દુભાગી તેની એક બાજુએ △ઓ गसम અને गरप એવા દોર્યા છે કે જેની सम = रप, गम = गप છે. સાબીત કરોઃ सप = रम.

૨૮. કોઇ પણ ત્રિકોણની મધ્યગાઓનો બમણો સરવાળો તેની પરિમિતિ કરતાં વધારે છે.

૨૯. ચતુષ્કોણનો એક વિકર્ણ સામેના કોણોને દુભાગે તો તે બીજા વિકર્ણને કાટખુણે દુભાગે છે.

૩૦. સમદ્વિભુજ △सरग માં मप॥रग દોરેલી છે. रप, गम પરસ્પર ध માં છેદે છે. સાબીત કરો △मपध સમદ્વિભુજ છે.

૩૧. △सरगના ∠स ને सम દુભાગી रग ને म માં મળે છે. मप॥सर, सग ને पમાં મળે છે. पध ⊥ सम, सर ને धમાં મળે છે. સાબીત કરોઃ सम, पध પરસ્પર દુભાગે છે.

૩૨. ૩" ભુજા ઉપર सरगम ચોરસ દોરો. स થી ૧" દૂર सर, सम ઉપર म અને ल બિંદુઓ લ્યો. ग થી ૧" દૂર गर, गम ઉપર ध અને न બિંદુઓ લ્યો. સાબીત કરો કે पधनल લંબચોરસ છે. તેની પરિમિતિ માપો અને ગણતરી કરી મેળવી જુઓ.

૩૩. सर = ४" અને ∠स = ૪૫° લઇ सरगम સમભુજ ચતુષ્કોણ દોરો. તેનું ક્ષેત્રફળ કહાડો અને માપી મેળવી જુવો.

૩૪. એક ભુજા = ૫ સેમિ., એક કોણ = ૪૫°, અને ક્ષેત્રફળ = ૪૦ ચો. સેમિ., હોય તેવો સમાન્તર ચતુષ્કોણ દોરો. મોટામાં મોટી ભુજા માપો.

૩૫. ૬" અને ૫" વિકર્ણોવાળો સમભુજ ચતુષ્કોણ દોરો. તેનું ક્ષેત્રફળ કહાડો.

૩૬. ૨" પાયા ઉપર નિયમિત ષટ્કોણ દોરો અને તેના જેટલી જ ઉંચાઇના સમાન ત્રિકોણમાં તેને ફેરવો. તેનો પાયો માપો.

૩૭. ૮, ૭, ૧૨ સેમિ.ની ભુજાઓવાળો ત્રિકોણ દોરો અને તેના મધ્યગાઓ ગણતરી કરી કહાડો.

૩૮. નીચેના માપના ચતુષ્કોણના સમાન એક ત્રિકોણ એવો બનાવો કે જેની એક ભુજા ૫.૫" હોયઃ

अब = ૪.૩", बक = ૫.૨", कड = ૧.૮" ∠ ब=૬૪°, ∠ क = ૧૧૬°.

૩૯, નીચેના માપનો ત્રિકોણ બનાવો.

સ + ર = ૪.૫", ગ = ૩.૭", ग = ૯૯°.

૪૦. કાટખુણ ત્રિકોણના કાટખુણામાંથી દોરેલી કર્ણને દુભાગનાર રેખા કર્ણથી અર્ધી છે.

૪૧. △अबकની बक, कअ અને अब ભુજાઓ ઉપર प, म, અને न બિંદુઓ આવેલાં હોય તો △अमन, △बपन અને △कपम નાં પરિવૃત્તો એક બિંદુમાં મળે છે.

૪૨. ત્રણ પરસ્પર છેદતાં વર્તુલોની સામાન્ય જીવાઓ એક બિંદુગામી છે.

૪૩. નીચેની શરતો પૂરી પાડતો △अबक દોરો. તેની બાકીની ભુજાઓ અને કોણો માપો.

અ = ૪"; अ = ૭૫°; કોણના દુભાજક ઉપર प બિંદુ એવી રીતે આવેલું છે કે જેમાંથી बक ઉપરનો લંબ ब થી ૩" દૂર बक ને મળે છે. प અને अ, बकની એક જ બાજુએ આવેલાં છે.

૪૪. △सरग માં मप‖रग દોરી છે. સાબીત કરોઃ △समग = △सपर.

૪૫. सरगम ચતુષ્કોણમાં स, र, ग અને म થી સમાન અંતરે આવેલું प બિંદુ શોધી કહાડો.

૪૬. कचटत ચતુષ્કોણને कट દુભાગે છે. સાબીત કરોઃ कट, चत ને દુભાગે છે.

૪૭. ‖ કોણોના દુભાજકો લંબચોરસ બનાવે છે.

૪૮. $\triangle$ સરગ માં ગમ॥રપ અનુક્રમે સર ને મ અને સગ લંબાવેલીને પ માં મળે છે. જો $\triangle$ રગપ = $\triangle$ સગર હોય તો મ, સર નું મધ્યબિંદુ છે.

૪૯. સમભુજ ત્રિકોણની અંદર આવેલા કોઇ એક બિંદુમાંથી તેની ભુજાઓને દોરેલા લંબોનો સરવાળો બિંદુ ગમે ત્યાં લીધું હોય તો પણ અચળ રહે છે,

૫૦. $\triangle$ સરગ નું લંબસગમબિંદુ લ હોય અને રલગમ સમાન્તર ચતુષ્કોણ પૂરો કર્યો હોય તો સાબીત કરો કે સમ, $\triangle$ સરગ ના પરિવૃત્તનો વ્યાસ છે.

૫૧. સરગમ ⊙માં સગ અને રમ જીવાઓ પ આગળ પરસ્પર કાટખુણે છેદે છે. ગમ જોડો. સઘ⊥ગમ, રમ ને ન માં મળે છે. સાબીત કરો: રપ = પન.

૫૨. બે વર્તુલો પરસ્પર સ અને ર માં છેદે છે અને એક વર્તુલના પરિઘ ઉપર આવેલા પ બિંદુમાથી પસગ અને પરમ રેખાઓ બીજા વર્તુલના પરિઘને ગ, મ મળે છે. સાબીત કરો કે ગમ॥પ આગળ વર્તુલને દોરેલી સ્પર્શરેખા.

૫૩. સરગમ લંબચોરસ અને પ, ધ, ન, લ, તેની ભુજાઓનાં મધ્યબિંદુઓ છે. સાબીત કરો કે પધનલ સમભુજ ચતુષ્કોણ છે અને તેનું ક્ષેત્રફળ સરગમ થી અર્ધું છે.

૫૪. નીચેના માપનો સરગમપ પંચકોણ દોરો અને તેને એવા સમાન ત્રિકોણમાં ફેરવો કે જેની એક ભુજા ૫ સેમિ. હોય:
સર= ૬.૫, રગ = ૨.૪, ગમ = મપ = ૪, પસ=૨.૫ સેમિ., $\angle$ સ = ૮૦°, $\angle$ ર = ૧૩૩°,

૫૫. $\triangle$ સરગ ના કર્ણ રગ અને ભુજા સગ ઉપર રમપગ અને સગધન ચોરસો બહારની બાજુએ દોર્યાં હોય તો (ક) સપ, રધ ને કાટખુણે છેદે અને (ખ $\triangle$ ધગપ=$\triangle$ સરગ થાય છે.

૫૬. सर સુરેખા ઉપર અર્ધવર્તુલ દોર્યું છે. सर ઉપર આવેલા કોઇ એક ल બિંદુમાંથી सर ને દોરેલો લંબ પરિધિને म માં મળે છે. સાબીત કરો: सल.लर = मलर.

૫૭. કોઇ નિયમિત બહુકોણના અંતઃકોણો ૧૩૦°, ૧૩૫°, ૧૪૦°, ૧૪૪°, ૧૪૫°, વા ૧૫૦° હોય? જો હોય તો તેની ભુજાઓની સંખ્યા કેટલી?

૫૮. अबकड સમાન્તરચતુષ્કોણમાં प બિંદુ पअ૨ + पब૨= पक૨ + पड૨ થાય તેવી રીતે ફરે છે. તો प નું નિધાન કહાડો.

૫૯. એક વર્તુલમાં सर જીવાને गम જીવા प આગળ દુભાગે છે. જો ∠समग=૩૦°, गप = ૧૬ સેમિ. અને पम = ૪ સેમિ. હોય તો सर ની લંબાઇ કેટલી?

૬૦. सरग સુરેખામાં सर = ૫, रग = ૪ સેમિ. છે. स થી ૮ સેમિ. દૂર આવેલા क કેન્દ્રથી र, ग માં થઇને જાય તેવું ⊙દોરો क નું रग થી અંતર શોધી કહાડો.

૬૧. सरग સુરેખા क કેન્દ્રવાળા ⊙ ને र અને ग માં મળે છે. सर = ૪, रग = ૫, सक=૮ સેમિ. હોય તો ⊙ની ત્રિજ્યા?

૬૨. सरग સુરેખામાં सर = ૪", रग = ૫" છે. र,ग માં થઇને જતા વર્તુલની स માંથી દોરેલી સ્પર્શરેખાની લંબાઇ ગણી કહાડો.

૬૩. पसर અને पगम સુરેખાઓ ⊙ને सर અને गम માં મળે છે. पस = ૫" पग = ૭", गम = ૩" છે. सर શોધી કહાડો.

૬૪. ૫ સેમિ. ત્રિજ્યાના ⊙માં ૬ સેમિ. અને ૮ સેમિ. સમાન્તર જીવાઓ દોરેલી છે. તે બે વચ્ચેનું અંતર માપો અને ગણતરી કરી સરખાવો.

૬૫. વર્તુલની બે સ્પર્શરેખાઓ ૧૨૦° નો કોણ બનાવે છે. સ્પર્શબિંદુઓ જોડનારી જીવા = ૬" છે. તો વર્તુલની ત્રિજ્યા કેટલી?

૬૬. બહારના એક બિંદુમાંથી વર્તુલના પરિઘ સુધી દોરવામાં આવેલી સુરેખાઓનું નિધાન કહાડો.

૬૭. सरग અચળ સુરેખા છે. र અને ग માં થઇને જતા વર્તુલને स માંથી દોરેલી સ્પર્શરેખાઓનાં સ્પર્શબિંદુઓનું નિધાન કહાડો.

૬૮. બે સમાન વર્તુલો એક બીજાના કેન્દ્રમાં થઇને જાય તેમ દોર્યાં હોય તો સામાન્ય જીવા ઉપરનો ચોરસ ગમે તે એકની ત્રિજ્યા ઉપરના ત્રણ ચોરસો સમાન થાય.

૬૯. વર્તુલના કેન્દ્ર क થી વર્તુલની બહાર આવેલા स બિંદુનું અંતર વ્યાસની લંબાઇ જેટલું છે. सप અને सघ વર્તુલની સ્પર્શ-રેખાઓ દોરી હોય તો △सपघ સમકોણ થાય.

૭૦. सर વ્યાસ અને सप વર્તુલની જીવા છે. सघ જીવા ∠रसप ને દુભાગે છે. સાબીત કરો: घ આગળની સ્પર્શરેખા ⊥सप.

૭૧. सर અને गम વર્તુલની સમાન્તર જીવાઓ છે. रमનું મધ્યબિંદુ प છે. सप, गम લંબાવવાથી घ માં મળે છે. સાબીત કરો: गप = पघ.

૭૨. सरगम વાર્તિક ચતુષ્કોણમાં सग, ∠ रसम ને દુભાગે છે, गप = सग થાય ત્યાંસુધી सम લંબાવી સાબીત કરો: सर = मप.

૭૩. ચતુષ્કોણની ભુજાઓ નિયમિત લંબાવવાથી બાહ્યકોણોના દુભાજકો વાર્તિક ચતુષ્કોણ બનાવે છે.

૭૪. ૩ સેમિ. પાયા ઉપર નિયમિત પંચકોણ દોરો.

૭૫. ૨.૫ સેમિ. પાયા ઉપર નિયમિત અષ્ટકોણ દોરો.

૭૬. સમદ્વિભુજ △सरग માં सर = सग છે. रस = सम થાય તેમ रस ને म સુધી લંબાવી છે. સાબીત કરો: गम ⊥ रग.

૭૭. નીચેના માપનો સમભુજચતુષ્કોણ દોરી તેની ભુજા ગણુતરી કરી કહાડો અને માપી સરખાવોઃ
ક્ષેત્રફળ = ૨૪ ચો. સેમિ., એક વિકર્ણ = ૮ સેમિ.

૭૮. નીચેના માપનો ત્રિકોણુ દોરોઃ
પાયો = ૫.૬ સેમિ., પાયાનો એક કોણુ = ૬૦°, બાકીની બે ભુજાઓનો સરવાળો = ૯.૪ સેમિ.

૭૯. એક વર્તુલનો अइ વ્યાસ અને अब, कड કાટખુણે છેદતી જીવાઓ છે. સાબીત કરોઃ कब = डइ.

૮૦. ∠स અને ∠र કા. ખુ. હોય અને सर = रग = ૨″ અને गम = ૪.૫″ હોય તેવો सरगम ચતુષ્કોણુ દોરો.

૮૧. ૫ સેમિ. ભુજા અને ઉંચાઇ ૪½ સેમિ. હોય તેવો સમભુજ ચતુષ્કોણુ દોરો.

૮૨. પાયો=૧૨ સેમિ., ઉંચાઇ=૩ સેમિ. અને દરેક તિર્યકરેખા = ૬ સેમિ. હોય તેવો સમલમ્બચતુષ્કોણુ દોરો. તેના કોણો માપો અને ગણુતરી કરી પરિણામ સરખાવો.

૮૩. ૨″ ત્રિજ્યાના વર્તુલના પરિગત અને અંતર્ગત ચોરસો દોરો. તેમની ભુજાઓ ગણુતરી કરી કહાડો.

૮૪. નીચેના માપના ત્રિકોણો દોરોઃ
(ક) रग = ૨.૩″, ∠स = ૫૫° અને र માંથી सग ઉપરની મધ્યગા = ૧.૬″.
(ખ) सर = ૨.૪″. सग = ૩.૧૫″ અને रस નો रग ઉપર પ્રક્ષેપ = ૧″.

૮૫. △अबक નો ∠अ ગુરુકોણુ છે. ड અને इ, बक અને कअ નાં મધ્યબિંદુઓ છે. म, △अबक ના પરિવૃત્તનું કેન્દ્ર હોય અને मइ, बक ને प માં મળે તો સાબીત કરોઃ डप.पक=मप.पइ

૮૬, अब અને अक વર્તુલની સ્પર્શરેખાઓ દોરી अबडक સમાન્તર ચતુષ્કોણ પૂરો કર્યો છે. ड વર્તુલના પરિધ ઉપર હોય તો સમાન્તર ચતુષ્કોણના કોણો કેટલા ?

૮૭. સમદ્વિબાહુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો ઉપરના ચોરસોના સરવાળો, તિર્યક્ રેખાઓ ઉપરના ચોરસોના સરવાળાથી સમાન્તર ભુજાઓથી બનેલા બે લંબચોરસ જેટલો વધારે છે.

૮૮. अब વર્તુલનો વ્યાસ છે. अक અને बड જીવાઓ વર્તુલની અંદર म માં છેદે છે. સાબીત કરોઃ $अब^2 = अक.अम + बड.बम$

૮૯. વર્તુલના અંતર્ગત સમભુજ ત્રિકોણની ભુજા ઉપરનો ચોરસ, અંતર્ગત નિયમિત ષટ્કોણની ભુજાથી ત્રણ ગણો છે.

૯૦. △अबक ની बक ભુજા ઉપર अ માંથી अड લંબ દોર્યો છે. इ, बक નું મધ્યબિંદુ છે. સાબીત કરો કે अब અને अक ઉપરના ચોરસોનો તફાવત बक અને डइ થી બનતા બે લંબ-ચોરસોની બરાબર છે.

૯૧. △अबक સમભુજ છે. म પરિવૃત્ત વર્તુલનું કેન્દ્ર છે. अम જોડી વર્તુલને ड માં મળવાદો. સાબીત કરોઃ △मबड સમભુજ છે.

૯૨ अबक સમભુજ ત્રિકોણની बक, कअ, અને अब ભુજાઓ ઉપર અનુક્રમે प, ल, र બિંદુઓ એવી રીતે આવ્યાં છે કે જેથી बप = कल = अर થાય છે. સાબીત કરોઃ △पलर સમભુજ છે.

૯૩. सर = ૨·૩ સેમિ., रग = ૪·૫ સેમિ., ઉંચાઇ = ૩·૮ સેમિ. હોય તેવો △सरग દોરો. सल ⊥ रम દોરી रल, लग

માપો અને ગણતરી કરી તે બરાબર છે કે નહિ તે તપાસો.

૯૪. ∠ स કાટખૂણો હોય તેવો નીચેના માપનો △सरग દોરો: रग = ૪", ∠ र = ૨∠ ग. सर માપો અને સાબીત કરો: सर = $\frac{1}{2}$ रग.

૯૫. નીચેના માપનો △सरग દોરો અને ∠ स, ∠ ग માપો: रग = ૩.૭", ∠ र = ૭૫°, सर + सग = ૫.૫".

૯૬. નીચેના માપનો સમદ્વિભુજ △सरग દોરો: रग = ૬ સેમિ., सर + सम = ૧૦.૫ સેમિ. અને सम ⊥ रग.

૯૭. નીચેના માપનો △सरग દોરો:
∠ स = ૪૨°, रम ⊥ सग = ૫.૭ સેમિ , गप ⊥ सर = ૪.૩ સેમિ.

૯૮. रग = ૮ સેમિ., गस = ૭ સેમિ., सर = ૯.૨ સેમિ. લઇ △सरग દોરો. स, र, ग માંથી અનુક્રમે सग, रस, गर ને समप, परध, धगन લંબો દોરી △पधन પૂરો કરો. △सरग અને △पधन ના કોણો માપી સરખાવો. સાબીતી આપો.

૯૯. म, सरનું મધ્યબિંદુ છે. सप, मल, रक સમાન્તરરેખાઓને બીજી એક સુરેખા प, ल, क માં सर ની એક બાજુએ મળે છે. સાબીત કરો: ૨ मल = सप + रक.

૧૦૦. क, ⊙નું કેન્દ્ર અને सर જીવા છે. स, क, र, માં થઇને જાય તેવું એક ⊙ દોરી, सकर ચાપ ઉપર प એક બિંદુ લ્યો. पस જોડી પહેલા વર્તુલને लમાં મળવા દો સાબીત કરો: पल=पर.

૧૦૧. નીચેના માપ નો △सरग દોરો. વધારેમાં વધારે આવા કેટલા ત્રિકોણો દોરાય?
सर = ૧૧.૫ સેમિ. रग = ૪.૫ સેમિ. અને स માંથી सर ઉપરનો લંબ =૮.૫ સેમિ.

૧૦૨. ૧૦ સેમિ. વ્યાસના વર્તુલમાં અંતર્ગત ચોરસ દોરો. તેની ભુજા માપો. તે જ ⊙માં દોરેલા નિયમિત અષ્ટકોણની ભુજા કેટલી ?

૧૦૩. △सरग ના અંતઃકોણ ग નો દુભાજક सर ને म માં મળે છે. मघ‖रग બાહ્ય ∠ग ના દુભાજકને घ માં અને सग ને पમાં મળે છે. સાબીત કરો: मप = पघ.

૧૦૪ △ सरग નાં શિરોબિંદુઓમાંથી रग, गस, सर (જરૂર પડે તો લંબાવેલી) ને અનુક્રમે प, ल, र, માં મળે તેમ સમાન્તર સુરેખાઓ દોરી છે. સાબીત કરો: △पलर = ૨ △सरग.

૧૦૫ △सरग ની સામેની ભુજાઓ ઉપરના सम, रप, गघ લંબો ल માં મળે છે. सन, △सरगના પરિવૃત્તનો વ્યાસ છે. સાબીત કરો: रनगल સમાન્તર ચતુષ્કોણ છે.

૧૦૬. इ, फ, ग, ह અનુક્રમે अबकड સમાન્તર ચતુષ્કોણની अब, बक, कड અને डअ ભુજાઓ ઉપર એવી રીતે લીધાં છે કે જેથી अइ = कग અને अह = कफ થાય. સાબીત કરો: इफगह સમાન્તરચતુષ્કોણ છે.

૧૦૭. ૩ સેમિ. ત્રિજ્યાના વર્તુલના કેન્દ્રથી ૫ સેમિ. દૂર આવેલા બિંદુમાંથી એવી જીવા દોરો કે જેનો બહારનો ખંડ વર્તુલની અંદરના ખંડની બરાબર થાય. તેને માપો અને ગણતરી કરી લંબાઇ સરખાવો.

૧૦૮. ત્રિકોણની ભુજાઓનાં મધ્યબિંદુઓ ઉપરથી ત્રિકોણ દોરો.

૧૦૯. પરસ્પર છેદતાં ૩ અને ૪ સેમિ. ત્રિજ્યાઓનાં બે વર્તુલો નાં કેન્દ્રો ૫ સેમિ. ને અંતરે છે. સામાન્ય જીવાની લંબાઇ અને તેનું દરેક કેન્દ્રથી અંતર ગણી કહાડો.

૧૧૦. ત્રિકોણના અંતર્વૃત્તની ત્રિજ્યા અને પરિમિતિથી બનેલો લંબચોરસ, ત્રિકોણના બમણા ક્ષેત્રફળ જેટલો છે.

૧૧૧. अबकड સમાન્તર ચતુષ્કોણની बक ભુજાના इ બિંદુમાંથી डइफ સુરેખા अब લંબાવેલીને फમાં મળે છે. સાબીત કરો: △अइब = △कइफ.

૧૧૨. अ, प, ल, म, न બિંદુઓ વર્તુલના પરિઘ ઉપર આવેલાં છે. ચાપ अप = ચાપ पल અને ચાપ अन = ચાપ लम છે. સાબીત કરો: पन, अल અને अम સાથે સરખા કોણો બનાવે છે.

૧૧૩, पन વર્તુલનો ચાપ અને म ચાપનું મધ્યબિંદુ છે. જો र, पन ચાપ ઉપર કોઈ એક બિંદુ હોય તો मर, બાહ્ય ∠परन ને દુભાગે છે.

૧૧૪. बक = ૧.૪", ∠अबक = ૪૫° અને अब + अक = ૩.૨" હોય તેવો △अबक દોરો. બાકીના કોણો અને ભુજાઓ માપો.

૧૧૫. સમભુજ △अबकની ભુજા बक નું ड અને कड નું इ મધ્યબિંદુઓ છે. સાબીત કરો: अइ² = ૧૩ कइ².

૧૧૬. આપેલા ∠बअकમાં આપેલા બિંદુ ड માં થઈને बडक સુરેખા એવી રીતે દોરો કે જેથી बड = डक થાય.

૧૧૭. ૨.૫" ત્રિજ્યાના વર્તુલની अब અને कड સમાન્તર જીવાઓ ૩.૯"ને અંતરે આવેલી છે. જો अब =૧.૪" હોય તો कड કેટલી?

૧૧૮. એક બંદરમાં प અને क જગાઓએ જોખમનાં નિશાનો છે. प થી क નું અંતર ૩૦૦′ છે. पक, વહાણ સાથે ૬૫° થી વધારે અંશનો કોણ બનાવે તો તે જોખમમાં આવે તેમ છે. તો જોખમના પ્રદેશની હદ દોરો. (માપ: ૧" = ૧૦૦′)

૧૧૯ સમદ્વિભુજ $\triangle$ अबकની अक ભુજાનું ड મધ્યબિંદુ છે. એક વર્તુલ अक ને ड આગળ સ્પર્શી કરી ब માં થઈને જાય છે અને अब ને न માં મળે છે. સાબીત કરોઃ बन = ૩ अन.

૧૨૦. ૫" લંબાઈની સુરેખાના સાત સરખા ભાગ કરો. આ ભાગોના ચાર, પાંચ અને ૭ ભાગો બરાબર ભુજાઓ લઈ ત્રિકોણ દોરો. નાનામાં નાનો કોણ માપો.

૧૨૧. अबकड સમાન્તર ચતુષ્કોણની अब, बक, कड અને अड ભુજાઓમાં અનુક્રમે प, ल, र, स, બિંદુઓ એવી રીતે લીધાં છે કે જેથી अप = बल = कर = डस થાય. સાબીત કરોઃ पलरस સમાન્તર ચતુષ્કોણ છે.

૧૨૨. એક ચતુષ્કોણની अब, बक, कड, डअ ભુજાઓનાં इ, फ, ग, ह, મધ્યબિંદુઓ છે. સાબીત કરોઃ बक² + अड² + अक² + बड² = अब² + कड² + ૪ इग².

૧૨૩. ૩ અને ૪ સેમિ. ત્રિજ્યાનાં બે વર્તુલો, કે જેમનાં કેન્દ્રો अ અને ब ૫ સેમિ. દૂર છે, તે પરસ્પર प અને क માં છેદે છે. अब વર્તુલોને र અને स માં છેદે છે. સાબીત કરોઃ $\angle$ परक + $\angle$ पसक = ૩ કા. ખુ.

૧૨૪. જુદાં જુદાં કદના ચાર ગોળ સિક્કાઓ દરેક બીજા બેને અડકે તેવી રીતે ટેબલ ઉપર મૂકયા છે. સાબીત કરો કે ચાર સ્પર્શ-બિંદુઓ વાર્તિક છે.

૧૨૫. બે સમાન વર્તુલો अ અને ब માં છેદે છે. તેમાંના એકમાં अक = अब જીવા દોરી હોય તો बक બીજા વર્તુલની સ્પર્શરેખા થાય.

૧૨૬. કાટખુણત્રિકોણમાં કર્ણ અને અંતર્વૃત્તના વ્યાસનો સરવાળો બાકીની ભુજાઓના સરવાળા બરાબર છે.

પ્રશ્નપત્રો

ગૂજરાત વિદ્યાપીઠ

વિનીત પરીક્ષા

સંવત ૧૯૭૭. સન ૧૯૨૧.

૧. નીચેના માપનો ત્રિકોણ દોરો અને તેના બાકીના કોણો અને ભુજાઓ માપોઃ

પાયો = ૭ સેમિ., શિરઃકોણ = ૪૦° અને ક્ષેત્રફળ = ૧૭.૫ ચો. સેમિ.

૨. એક ત્રિકોણાકાર ખેતર ત્રણ ભાઇઓને વારસામાં મળ્યું છે. તેની બાજુઓ અનુક્રમે ૮૫, ૯૫ અને ૧૦૫ યાર્ડ છે. નાનામાં નાની બાજુની સામેના ખુણામાં કુવો આવેલો છે. ખેતર ત્રણ ભાઇઓ વચ્ચે દરેકને પોતાના ભાગમાં થઇને કુવાનો ઉપયોગ કરવાને અનુકૂળતા મળે તેવી રીતે સરખે ભાગે વહેંચો. અને તેના ભાગ કરનારી હદની વાડોની લંબાઇ યાર્ડમાં કહો. (માપઃ ૧" = ૧૦ યાર્ડ)

૩. કોઇ પણ ત્રિકોણની બે ભુજાઓનો સરવાળો ત્રીજી કરતાં વધારે છે.

ચતુષ્કોણની પરિમિતિ તેના વિકર્ણોના સરવાળાથી વધારે છે.

૪. ત્રણ અથવા વધારે સમાન્તર સુરેખાઓ કોઇ એક છેદકના આંતર્ભાગો સરખા બનાવે, તો તેઓ બીજા કોઇ પણ છેદકના અંતર્ભાગો પણ સરખા બનાવે છે.

સરગમ ચતુષ્કોણની सर, रग, गम અને मस ભુજાઓનાં મધ્યબિંદુઓ त, थ, द, ध હોય, તો तथदध સમાન્તરભુજ ચતુષ્કોણ છે,

૫. કોઇ પણ ત્રિકોણમાં લઘુકોણની સામેની ભુજા ઉપરનો ચોરસ, બાકીની બે ભુજાઓ ઉપરના ચોરસો કરતાં, લઘુકોણ બનાવનારી એક ભુજા અને બીજીના તે ઉપરના પ્રક્ષેપથી બનતા બે લંબચોરસો જેટલો ઓછો છે.

૧૩, ૧૪, ૧૫ સેમિ.ની ભુજાઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ ગણતરી કરી કહાડો.

૬. બે બિંદુઓને જોડનારી રેખા તેની એક બાજુએ બીજાં બે બિંદુઓ આગળ સમાન કોણો બનાવે તો તે ચારે બિંદુઓ વાર્તિક છે.

ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામેની ભુજાઓ ઉપર દોરેલા લંબો એકબિંદુગામી છે.

૭. એક વર્તુલની બે જીવાઓ લંબાવવાથી વતુલની બહાર મળે, તો એકના ખંડોથી બનેલો લંબચોરસ બીજાના ખંડોથી બનેલા લંબચોરસ બરાબર છે.

सर વર્તુલનો વ્યાસ છે. स માંથી એક જીવા દોરેલી છે. सर ને દોરેલો લંબ सर ને ग માં અને सप ને ल માં મળે તો સાબીત કરો: सप.सल = सर.सग.

સંવત ૧૯૭૮. સન ૧૯૨૨.

૧ ત્રણ ઘણા લાંબા પાકા રસ્તા પરસ્પર છેદી ૩, ૫, અને ૭ માઇલની બાજુઓનો ત્રિકોણ બનાવે છે. જો કોઇ ગૃહસ્થને ત્રણે રસ્તાઓથી સરખે અંતરે એક ઘર બાંધવું હોય તો ક્યાં બાંધવું? રસ્તાથી તેનું અંતર કેટલું? આવું ઘર બાંધવાને વધારેમાં વધારે આવી કેટલી જગાઓ મળે? (માપ: ૧ સેમિ. = ૧ માઇલ)

૨. ત્રણ અથવા વધારે સમાન્તર સુરેખાઓ કોઇ એક છેદકના અંતર્ભાગો સરખા બનાવે, તો તેઓ બીજા કોઇ પણ છેદકના અંતર્ભાગો પણ સરખા બનાવે છે.

कखगघ સમાન્તર ચતુષ્કોણની **कख** અને **गघ** ભુજાઓનાં **ट** અને **ठ** મધ્યબિંદુઓ છે. સાબીત કરો કે **टघ** અને **खठ**, **कग** ને ત્રિભાગે છે.

૩. એક ત્રિકોણની ત્રણ ભુજાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની ત્રણ ભુજાઓ બરાબર હોય, તો ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

કોઇ પણ **कखग** ત્રિકોણની બહારની ભુજાઓ ઉપર **कखल**, **खगम** અને **कगन** સમભુજ ત્રિકોણો દોર્યા હોય, તો **कम** = **खन** = **गल** થાય

૪. એકજ પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તરો વચ્ચે આવેલા ત્રિકોણો સમાન છે.

$\triangle$**अबक**ની **अल**, **बन** અને **कम** મધ્યગાઓ **ग** માં મળે, તો $\triangle$**बगक** = $\frac{1}{3}$ $\triangle$**अबक**.

૫. એકજ વૃત્તખંડમાં આવેલા કોણો સમાન છે.

पअ પરસ્પર છેદતા બે વર્તુલોની સામાન્ય જીવા છે. **प** માંથી બન્ને પરિઘોને મળે તેમ **बपक** $\perp$ **पअ** દોરી છે. વળી **अ** માંથી **बअख** અને **लअर** બન્ને બાજુ પરિઘોને મળે તેમ દોરી છે, સાબીત કરો: **पअ**, $\angle$ **लपर** ને દુભાગે છે..

૬. નીચેના માપના $\triangle$**अबक** નાં બહિર્વૃત્તો દોરો અને તેમની ત્રિજ્યાઓ માપો.

अब = ૧.૧", **अक** = ૧.૪" અને $\angle$ **अ** = ૪૦°.

पकरस વાર્તિક ચતુષ્કોણની पल ભુજા ट સુધી લખાવીએ તો બાહ્ય ∠ रकट = અંતઃકોણની સામેનો ∠ पसर થાય.

૭. કોઇ પણ બહારના બિંદુમાંથી વર્તુલને દોરવામાં આવેલી સ્પર્શ રેખાઓ સમાન છે.

વર્તુલના પરિગત ચતુષ્કોણ पकरस માં पक + रस = कर + सप થાય છે.

સંવત ૧૭૭૯. સન ૧૯૨૩.

૧. કોઇ પણ બહુકોણના અંતઃકોણોનો સરવાળો, તેની ભુજાઓને બેએ ગુણી ચાર બાદ કરતાં જે આવે તેટલા કાટખુણા બરાબર છે.

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો અને શક્ય બાબતોમાં ભુજાઓની સંખ્યા કહો:

કોઇ પણ નિયમિત બહુકોણના બાહ્યકોણો ૧૫°, ૨૦°, હોય?
કોઇ પણ નિયમિત બહુકોણના અંતઃ કોણો ૧૩૦°, ૧૭૫°, હોય?

૨. "બિંદુનું નિધાન" એટલે શું તે દાખલા આપી સ્પષ્ટ કરો.

"નિધાન" ઉપરના સિદ્ધાન્તોમાંથી એકની પ્રતિજ્ઞા લખો અને સાબીતી આપો.

अब, कड, પરસ્પર ૩" અંતરે છે प નામનું સ્થિર બિંદુ अब થી ૨" અને कड થી ૧" દૂર છે. पनुं નિધાન દોરવાને ઉપરના શબ્દોમાં ફેરફાર કરવાની જરૂર પડે તો કરો અને તેનું નિધાન દોરો.

૩. એક જ પાયો અને એક જ સમાન્તર સુરેખાઓ વચ્ચે આવેલા સમાન્તર ચતુષ્કોણો સમાન છે.

એક જ પાયા ઉપર બનેલા ચોરસ અને સમભુજચતુષ્કોણમાં ચોરસનું ક્ષેત્રફળ સમભુજચતુષ્કોણના કરતાં વધારે છે.

૪ કોઇ પણ ત્રિકોણની બે ભુજાઓ ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો અર્ધી ત્રીજી ભુજા ઉપરના ચોરસ અને ત્રીજી ભુજાને દુભાગનાર મધ્યગા ઉપરના ચોરસોના સરવાળાથી બમણો છે.

કોઇ પણ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો તેની સામેની ભુજાઓને જોડનારી રેખાઓ ઉપરના ચોરસોના સરવાળાથી બમણો છે.

૫. વાર્તિક ચતુષ્કોણના સામેના કોણો પૂરક છે.

બે વર્તુલોના प અને ल છેદનબિંદુઓમાંથી अपब અને कलड સુરેખાઓ એક વર્તુલને अ, क અને બીજાને ब, ड માં મળે છે. સાબીત કરો: अक ∥ बड.

૬. વર્તુલની બહાર આવેલા એક બિંદુમાંથી એક જીવા અને એક સ્પર્શ રેખા દોરી હોય તો જીવાના ખંડોથી બનેલો લંબચોરસ સ્પર્શરેખા ઉપરના ચોરસ બરાબર છે.

△सरग નો ∠र કા. ખુ. છે. रमांથી रम ⊥ सग દોરી છે. સાબીત કરો: (ક) सम.मग = रम²; (ખ) सग.सम = सर²

૭. સમાન્તર ચતુષ્કોણાકારના એક ખેતરની પાસપાસેની બાજુઓ ૮૫ અને ૧૦૫ યાર્ડ લાંબી છે તે બેની વચ્ચેનો ખુણો ૭૦° નો છે. આ ખુણામાં એક કુવો આવેલો છે. ખેતર પાંચ ભાઇઓ વચ્ચે સરખે ભાગે એવી રીતે વહેંચો કે જેથી દરેકને કુવા ઉપર જવા આવવાને રસ્તો રહે. ખેતરના ભાગ કરનારી હદની લંબાઇ યાર્ડમાં આપો

૮. નીચેના માપના ત્રિકોણો દોરો: (ક) પરિમિતિ = ૧૩·૭ સેમિ: ∠ब = ૬૦°; ∠क = ૪૫°. (ખ) ક્ષેત્રફળ = ૯ ચો. ઇં.; પાયો = ૬"; એક ભુજા = ૪·૫". કોણો અને ભુજાઓ માપો.

મુંબાઇ યુનિવર્સિટીના પ્રશ્નપત્રો.

૧૯૧૯ એપ્રિલ

૧. **अब** = ૫ સેમિ. ઉપર ૨૨½° નો કોણુ આંતરે તેવો વૃત્તખંડ દોરો. **अ** ને **ब** આગળ સ્પર્શરેખાઓ દોરો. કેન્દ્રથી તેમના છેદનબિંદુનું અંતર માપો. સાબીતી આપ્યા સિવાય પૂરેપૂરી રચના લખો.

૨. **अबक** કોઇ એક ત્રિકોણુ છે. **अब** ના મધ્યબિંદુ **ड** માંથી **डइ**‖**बक** દોરી છે અને ∠ **अबक** નો દુભાજક **बइ**, **डइ** ને **इ**માં મળે છે. સાબીત કરો **अइब** = કા ખુ.

૩. જો કોણુમાંથી દોરેલી મધ્યગા સામેની અર્ધી ભુજાથી વધારે હોય તો તે કોણુ લઘુકોણુ હોવા જોઇએ.

૪. સમદ્વિભુજ ત્રિકોણુની બે સમાન ભુજાઓ ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો, એક જ પાયો અને એક જ સમાન્તરો વચ્ચે આવેલા બીજા કોઇ પણુ ત્રિકોણુની બે ભુજાઓ ઉપરના ચોરસોના સરવાળા કરતાં ઓછો છે.

૫. △**अबक** નો ∠**क** ગુરુકોણુ છે. **ड** અને **इ**, **अ** અને **ब** માંથી સામેની ભુજાઓ ઉપર દોરેલા લંબોના પાદો છે. સાબીત કરો: $अब^२$ = **बक.बड** + **अक.अइ**.

૬. △**अबक** ની **बक**, **कअ** અને **अब** ભુજાઓ ઉપર **प**, **ल**, **र** બિંદુઓ લ્યો. △ઓ **बपर** અને **कपल** નાં પરિવૃત્તો ફરીથી **न** માં મળે તો, **अ**, **र**, **न**, **ल** વાર્તિક છે.

૭. **अ**, **ब**, **क**, **ड**, સુરેખા ઉપર અનુક્રમે ચાર બિંદુઓ છે. તેના ઉપર **प** એક એવું બિંદુ શોધી કહાડો કે જેથી **पअ.पक** = **पब.पड** થાય.

૮. △**अबक** ના ∠**क** નો દુભાજક **कइ**, **अब** ને **इ** માં મળે છે. **अब** લંબાવેલી ઉપર **ड** બિંદુ એવું લીધું છે કે જેથી ∠**इकड** = ∠**कइड** થાય છે. સાબીત કરો કે **कड**, **अकब** ના પરિવૃત્તની સ્પર્શરેખા છે.

૧૯૧૯ મે

૧. $\triangle$पकर માં म કોઇ એક બિંદુ છે. સાબીત કરો કે पक + पर > मक + मर.

૨. ત્રિકોણુનાં મધ્યબિંદુઓ આપેલાં હોય તે ઉપરથી ત્રિકોણુ દોરો.

૩. $\triangle$अबक ના अब નું म અને अक નું न મધ્યબિંદુઓ છે. સાબીત કરો કે मन||बक અને बक = ૨ मन.

૪. ૧·૨૫" ત્રિજ્યા લઇ એક વર્તુલ દોરો અને ૫૪° ના કોણે પરસ્પર મળે તેવી બે સ્પર્શરેખાઓ દોરો.

૫. $\triangle$पकर નો $\angle$र કા.ખુ. છે. रम$\perp$पक, पक ને म માં મળે છે. સાબીત કરો: पक.कम = कर२

૬. अब વ્યાસ અને अक એક વર્તુલની જીવા છે. કેન્દ્ર कમાંથી ત્રિજ્યા कड||अक દોરી છે સાબીત કરો કે ड, बक ને દુભાગે છે.

૭. $\triangle$अबक ની अब અને अक સમાનભુજાઓ છે અને अक વ્યાસ ઉપર વર્તુલ દોરેલું છે. સાબીત કરો કે વર્તુલ बक ને દુભાગે છે.

૮. $\triangle$पकर ના प માંથી कर ઉપર લંબ कर ને ल માં મળે છે. અને क માંથી पर ઉપરનો લંબ पल ને म માં અને पर ને न માં મળે છે. સાબીત કરો કે रलमन વાર્તિક છે.

૧૯૨૦

૧. નીચેના માપના ત્રિકોણો દોરો:

(ક) $\angle$ब=૪૦°, $\angle$क=૬૦° અને અંતર્વૃત્તની ત્રિજ્યા=૩ સેમિ.

(ખ) अब + अक = ૩", बक = ૨·૬" અને $\angle$अ = ૧૨૦°

૨. જો ચતુષ્કોણુનો વિકર્ણ ચતુષ્કોણુને દુભાગે તો તે વિકર્ણ બીજા વિકર્ણને દુભાગે છે.

૩. $\triangle$ઓ अबक, डबकમાં $\triangle$अबक સમદ્વિભુજ ત્રિકોણુ હોય અને તેઓ એકજ પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તરો વચ્ચે આવેલા હોય તેા $\triangle$अबक ની પરિમિતિ $\triangle$डबक ની પરિમિતિ કરતાં ઓછી છે.

૪. $\triangle$पलर નેા $\angle$ र ગુરુકોણુ છે. पन, कर લંબાવેલી ને લંબ દોર્યો છે, જો पक² = पर² + ૩ कर² હોય તેા र, कन નું મધ્યબિંદુ છે.

૫. કાટખુણે મળતી બે ત્રિજ્યાઓ લંબાવવાથી વર્તુલની સ્પર્શ-રેખાને જે બિંદુઓમાં મળે તે બિંદુઓમાંથી વર્તુલને દોરેલી સ્પર્શ-રેખાઓ સમાન્તર છે

૬. अ, ब, क એક ◉ ઉપર છે. $\angle$ अ, $\angle$ ब, અને $\angle$ क ના દુભાજકો ◉ને ફરીથી प, ल, र માં મળતા હોય તેા लर $\perp$ अप.

૭. કાટખુણે સજ્જડ કરેલી બે પટ્ટીઓની લીમાં એક અચળ લંબાઇની સળી તેના છેડા બન્ને લીમાં રહે તેવી રીતે ખસે છે. સાબીત કરો કે સળીના મધ્યબિંદુનું નિધાન વર્તુલ છે.

૮. अड, बइ, कफ, $\triangle$ अबक ની સામેની ભુજાઓ ઉપર દોરેલા લંબોના પાદોથી બનતા $\triangle$ डइफ ના કોણોને દુભાગે છે.

૧૯૨૧

૧. કર્ણ = ૫ સેમિ. અને ક્ષેત્રફળ = ૫ ચેા. સેમિ. હોય તેવેા કાટખુણ ત્રિકોણુ દોરો.

सर = ૨", सग = ૧.૩" અને सમાંથી रग ઉપરનેા લંબ = ૧.૨" હોય તેવેા $\triangle$सरग દોરો. આવા વધારેમાં વધારે કેટલા ત્રિકોણેા દોરાય ? रग ની લંબાઇ ગણેા અને માપેા.

૨. એક ત્રિકોણુની બે ભુજાઓ અને અંતર્ગતકોણુ બીજા ત્રિકોણુની બે ભુજાઓ અને અંતર્ગતકોણ બરાબર હોય તેા બન્ને ત્રિકોણેા એકરૂપ છે.

△सरग ની सर અને सग ભુજાઓ ઉપર બહારની બાજુએ सरहप અને सगलम ચોરસો દોર્યા હોય તો △सरम ≡ △सपग.

૩. કોઇ પણ બહિર્વક્ર બહુકોણની ભુજાઓ અનુક્રમે લંબાવીએ તો બધા બાહ્યકોણોનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર થાય.

નિયમિત દશકોણના એક કોણના અંશો ગણો.

બેકી ભુજાઓના બહુકોણના એકાન્તરકોણો ૧૩૮° અને ૧૫૦° હોય તો તેની ભુજાઓની સંખ્યા કેટલી ?

૪. પરસ્પર છેદતી બે સુરેખાઓથી સરખે અંતરે રહેતા બિંદુનું નિધાન તે રેખાઓની વચ્ચેના કોણોને દૂભાગનાર સુરેખાઓની જોડ છે.

સમભુજ ત્રિકોણ अबक ની ભુજા ૫ સેમિ. છે. अबના મધ્યબિંદુથી ૩ સેમિ. અને अब અને अक થી સમાન અંતરે હોય તેવાં બિંદુઓ શોધી કહાડો.

૫. કોઇ પણ ત્રિકોણમાં લઘુકોણની સામેની ભુજા ઉપરનો ચોરસ =બાકીની બે ભુજાઓ ઉપરના ચોરસો−લઘુકોણ બનાવનારી એક ભુજા અને બીજીના તે ઉપરના પ્રક્ષેપથી બનતા બે લંબચોરસો.

△अबक નો ∠अ = ૬૦° છે. સાબીત કરો:

बक² = अब² + अक² − अब.अक.

૬. વર્તુલના સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલી જીવા સ્પર્શરેખા સાથે જે કોણો બનાવે છે તે કોણો એકાન્તરવૃત્તખંડમાંના કોણો બરાબર છે.

△अबकના પરિવૃત્તને अ, ब, क આગળ સ્પર્શરેખાઓ દોરી △चलर પૂરો કરો. સાબીત કરો કે આ ત્રિકોણના કોણો અનુક્રમે △अबकના બમણા કોણોના પૂરકકોણો છે.

૭. એક જ વર્તુલની બે જીવાઓ વર્તુલની અંદર વા બહાર પરસ્પર છેદે તો એકના ખંડોથી બનેલો લંબચોરસ બીજાના ખંડોથી બનેલા લંબચોરસ બરાબર છે:

सर સ્થિર રેખા વર્તુલના વ્યાસ अब ને કાટખુણે મળે છે. अ માંથી દોરેલી સુરેખા પરિધને प માં અને सर ને क માં મળે છે. સાબીત કરો કે લંબચોરસ अप.अक અચળ રહે છે.

૮. વર્તુલમાં અંતર્ગત નિયમિત અષ્ટકોણ દોરો.

જો સ અંતર્ગત નિયમિત અષ્ટકોણની ભુજા અને ર અંતર્ગત ચોરસની ભુજા અને ત્ર વર્તુલની ત્રિજ્યા હોય તો સાબીત કરો: $ર^{२} = स^{२} (२ + \sqrt{२}) = २त्र^{२}$

૧૯૨૨

૧. क કેન્દ્રવાળુ ૨ સેમિ. ત્રિજ્યાનું વર્તુલ અને ૩ સેમિ ની अब સુરેખા એવી રીતે આપેલાં છે કે જેથી कअ=૩.૫, कब=૫ સેમિ. થાય છે. જેનાં શિરોબિંદુ આપેલા વર્તુલના પરિધ ઉપર આવે તેવો अब પાયા ઉપર નાનામાં નાનો અને મોટામાં મોટો ત્રિકોણ દોરો. તેની ઉંચાઇ માપો અને ક્ષેત્રફળ ગણો.

૨. કોઇ પણ ત્રિકોણની એક ભુજા લંબાવી હોય તો બાહ્યકોણ દૂરના બે અંતઃકોણોની બરાબર છે.

લઘુકોણ ત્રિકોણના પાયાનો એક કોણ બીજાથી બમણો હોય તો, નાની ભુજા શિરોબિંદુમાંથી પાયા ઉપર દોરેલા લંબથી પાયાના થતા બે ખંડોના તફાવત જેટલી છે.

૩. એક જ પાયા ઉપર અને એક જ સમાન્તરો વચ્ચે આવેલા ત્રિકોણો સમાન છે.

△अबक ની अब ભુજા ઉપર આવેલા प બિંદુમાંથી पलर॥ અને = बक, अक ને ल માં મળે તો △अलर = △बपल.

૪. કોઇ પણ ત્રિકોણની બે ભુજાઓ ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો અર્ધી ત્રીજી ભુજા ઉપરના ચોરસ અને ત્રીજી ભુજાને દુભાગનાર મધ્યગા ઉપરના ચોરસના સરવાળાથી બમણો છે.

अबकड ચતુષ્કોણમાં अक અને बड નાં इ અને फ મધ્યબિંદુઓ છે. સાબીત કરો: $अब^2 + बक^2 + कड^2 + डअ^2 = अक^2 + बड^2 + ४\ इफ^2$

૫. વર્તુલના કેન્દ્ર અને જીવાના મધ્યબિંદુને જોડનારી રેખા જીવાને લંબ છે.

⊙ની બે જીવાઓ કાટખુણે છેદાવાથી થતા ચાર ખંડો ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો વ્યાસ ઉપરના ચોરસની બરાબર છે.

૬: વાર્તિક ચતુષ્કોણના સામેના કોણો પૂરક છે.

ચતુષ્કોણના વિકર્ણો કાટખુણે છેદે તો છેદનબિંદુમાંથી ભુજાઓ ઉપર દોરેલા લંબોના પાદો વાર્તિક છે.

૭. પરસ્પરસ્પર્શી બે ⊙ઓનું સ્પર્શબિંદુ કેન્દ્રરેખા ઉપર છે.

ત્રણ બાહ્યસ્પર્શી વર્તુલોનાં સ્પર્શબિંદુઓ प, ल, र, છે. જો पल, पर લંબાવવાથી लर માંથી જતા ⊙ને घ, न માં મળે તો घन તે ⊙નો વ્યાસ છે અને બાકીનાં ⊙ની કેન્દ્રરેખાને સમાન્તર છે.

૮. એક ⊙માં અંતર્ગત સમભુજ ત્રિકોણ અને નિયમિત ષટ્કોણની ભુજાઓની લંબાઇ स અને र હોય તો $स^2 = ३र^2$.

૧.૫" ત્રિજ્યાના ⊙માં અંતર્ગત સમભુજત્રિકોણ અને નિયમિત ષટ્કોણ દોરી ભુજાઓ માપી ઉપર પ્રમાણે ગણતરી કરી સરખાવો.

સન ૧૯૨૩

૧. (અ) बक = ૧૦ સેમિ., अक = ૬ સેમિ., અને अ માંથી દોરેલી મધ્યગા = ૫ સમિ. હોય તેવો △अबक દોરો अब માપો અને ગણતરી કરી પરિણામ સરખાવો. ∠अ કેટલો છે?

(બ) ૫ સેમિ. પાયા ઉપર શિરઃકોણ ૩૦° અને ક્ષેત્રફળ ૧૩.૭૫ ચો.સેમિ. નો ત્રિકોણ દોરી તેની ભુજાઓ અને કોણો માપો.

૨. સમાન્તર ચતુષ્કોણની સામેની ભુજાઓ અને કોણો સમાન છે અને દરેક વિકર્ણ સમાન્તર ચતુષ્કોણને દુભાગે છે.

अबकड‖ કોણમાં म એક બિંદુ છે. मअइब, मबफक, मकगड, मडहअ‖કોણો પૂરા કરી સાબીત કરો કે इफगह‖કોણ છે.

૩. જો એક △ના બે કોણો અને એક ભુજા બીજા △ ના બે કોણો અને અનુવર્તિ ભુજાની બરાબર હોય તો તે બન્ને એકરૂપ છે.

अबक સમદ્વિભુજકાટખુણત્રિકોણનો अब કર્ણ છે. ∠ बअक ને अड दुભાગી बक ને ड માં મળે છે. સાબીત કરો: अक + कड = अब.

૪. ગુરુકોણ ત્રિકોણમાં ગુરુકોણની સામેની ભુજા ઉપરનો ચોરસ = બાકીની બે ભુજાઓ ઉપરના ચોરસો + ગુરુકોણ બનાવનાર એક ભુજા અને બીજીના તે ઉપરના પ્રક્ષેપથી બનતા બે લંબચોરસો.

સમલંબચતુષ્કોણના વિકર્ણો ઉપરના ચોરસોનો સરવાળો, બે તિર્યકરેખાઓ ઉપરના ચોરસો અને સમાન્તર રેખાઓથી બનતા બે લંબચોરસોના સરવાળા બરાબર છે.

૫. બે સ્થિર બિંદુઓથી સરખે અંતરે રહેતા બિંદુનું નિધાન તે બે બિંદુઓને જોડનારી સુરેખાને દુભાગનાર લંબ છે.

अबकड ‖ કોણોમાં प બિંદુ એવી રીતે ફરે છે કે જેથી पअ² + पड² = पक² + पड² થાય છે. पનું નિધાન કહાડો.

૬. સમાન ●ઓમાં બે ચાપો સમાન હોય તો જીવાઓ સમાન છે.

कखग, વર્તુલનો અંતર્ગત ત્રિકોણ છે. कइ, ∠ क ને દુભાગી પરિધિને इ માં મળે છે. गम, ∠ ग ને દુભાગી कइ ને म માં મળે છે. સાબીત કરો: इख = इग = इम

૭. વાર્તિક ચતુષ્કોણના સામેના કોણો પૂરક છે.

कचटत વાર્તિકચતુષ્કોણમાં कट ⊥ चत હોય તો વિકર્ણોના છેદનબિંદુમાંથી કોઇ પણ ભુજાને દોરેલ લંબ સામેની ભુજાને દુભાગે છે

શુદ્ધિપત્ર

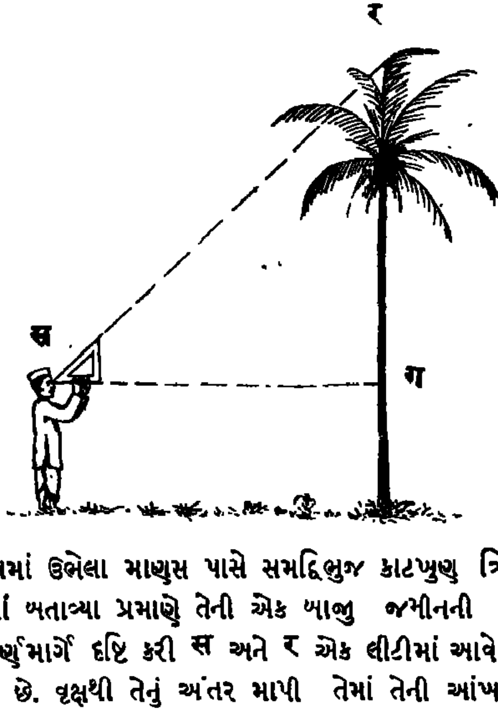
પૃષ્ઠ	પંક્તિ	અશુદ્ધ	ફેરફાર
૧૧	૧	વિદ્ધાર્થીઓને	વિદ્યાર્થીઓને
૧૩	૩	અનિષ્ઠાપત્તિ	અનિષ્ટાપત્તિ
,,	૭	Anglo	Angle
,,	૯	અતર્ગત	અંતર્ગત
૧૪	૨૩	(નિધાન પછી ઉમેરો)	નિયમિત Regular
,,	૧૭	Redius	Radius
,,	૬	પરિવૃત Circumscribed	(છેકી નાખો)
,,	૨૨	બહિર્ગત વર્તુલ	બહિર્વૃત્ત
૧૫	૪	શિશિબિંદુ	શિરોબિંદુ
,,	૫	શિરોબિંદુ કોણ	શિરઃકોણ
,,	૭	સજાતિય	સજાતીય
,,	૯	Regular	Equal
૧૬	૪	મામ્યસમીકરણ	સામ્યસમીકરણ
૪	૧૬	ક્રરવો	કરવો
૬	૭	તર્ગનાં	વર્ગનાં
૮	૩	લંભાઇની	લંબાઇની
૧૦	૯	લધુકોણ	લઘુકોણ
૧૭	૧૫	સત્પકોણ	સપ્તકોણ
૧૮	૭	ગુરૂકોણ	ગુરુકોણ
૧૯	૬	પરિધ	પરિઘ
૧૯	૮	,,	,,
૧૯	૧૩	સ્હે	કહે

૨૧	૧૦	ત્રિજુ	ત્રીજુ
૨૧	૧૩	કાણખુણે	કાટખુણે
૨૩	૫	પરસ્પર घ આગળ	પરસ્પર घ આગળ
૨૩	૮	અને ग पघ માં,	અને र पघ માં,
૨૪	૮	रग ને घ	रग ને घ
૨૫	૩	સઇ	લઈ
૨૮	૧૪	+ मलग = गपल +	+ मलग + गपल +
૨૯	૮	લબ	લંબ
૩૨	૧૩	બિંદુમા	બિંદુમાં
૩૩	૧૨	= धन	सग = धन
૩૩	૧૩	= पन	मग = पन
૩૬	૧૩	માપનો ચતુષ્કોણ	માપનો कचटत ચતુષ્કોણ
૩૮	૧	નાચના	નીચેના
૩૯	૧૧	ભૂજાઓ	ભુજાઓ
૪૬	૨૦	ભગાકાર	ભાગાકાર
૬૧	૧૮	सवन	सधन
૬૨	૧૩	એંદરના	અંદરના
૬૭	૧૬	સુમબહુકોણ	સમબહુકોણ
૬૭	૧૫	દરેકે	દરેક
૬૭	૨૧	ત્રિકણોની	ત્રિકોણની
૭૧	૨૧	કેરો:	કરો:
૭૩	૫	મનોયન	મનોયત્ન
૭૩	૯	અને સામાન્ય...દુભાગે છે (છેકી નાખો)	
૭૪	૧૨	દુભાગે છે.	દુભાગે છે, અને સામાન્ય પાયા ને પણ કાટખુણે દુભાગે છે.
૭૮	૧૩	सग सर હોય તો ∠ <	सग< सर હોય તો ∠ र<

૮૨	૧૧	$\angle$	$\angle$ सगम
૮૨	૧૫	$\angle$ सरग = गमस	$\angle$ सरग = $\angle$ गमस
૮૬	૨૩	મધ્યબિદુઓ	મધ્યબિંદુઓ
૮૯	૨૩	વર્તુંલ	વર્તુલ
૯૭	૭	આછું છે	ઓછું છે
૧૦૫	૭	મનોયત્ન ૨૩	મનોયત્ન ૨૨
૧૦૬	૦		સિદ્ધાન્ત ૨૩ (પૃષ્ઠ ૧૦૬ નીચે લખો)
૧૦૬	૧૧	મનોયત્ન ૨૪	મનોયત્ન ૨૩
૧૦૭	૧	म અને ल	म અને ल,
૧૧૦	૧૦	$\triangle$स द	$\triangle$सगद
૧૧૧	૩	તેટેલા	તેટલા
૧૧૨	૭	મનોયત્ન ૨૪	(છેકી નાખો)
,,	૧૨	ત્રિકાણાકાર	ત્રિકોણાકાર
,,	૧૬	હદની વેાડોની	હદની વાડોની
૧૧૬	૨૨	માંને છે	માને છે
૧૨૨	૧૩	શહેરીની	શેરીની
,,	૧૫	,,	,,
,,	૧૭	,,	,,
,,	૧૬	એક બારીને	બારીને
૧૨૬	૨	લધુકાણુ	લઘુકોણ
,	૩	,,	,,
૧૩૦	૫	ચોરચોનો	ચોરસોનો
૧૩૩	૧૫	અકૃતિમાં	આકૃતિમાં
૧૩૭	૧૪	સુરેખ	સુરેખા
૧૪૬	૧૦	દોસતી	દોરાતી

,,	૧૮	અતરે	અંતરે
૧૪૮	૧૪	સાબિત	સાબીત
૧૪૯	૯	સુરેખામા	સુરેખામાં
૧૫૦	૮	પરીધ	પરિધ
૧૫૨	૮	નિધાન	નિધાન
૧૫૩	૯	વિનણમંદિર	વિનયમંદિર
,,	૧૬	બાંધવો	બાંધવો
૧૫૫	૧૯	કેડલું	કેટલું
૧૫૬	૭	૨ सगर	૨ ∠ सगर
,,	૧૦	૨ कगस	૨ ∠ कगस
૧૫૭	૩	અર્ધવર્તુલ	અર્ધવર્તુલ
,,	૫	અંનર્ગત	અંતર્ગત
,,	૫	કેન્દ્રવાળા	કેન્દ્રવાળા
૧૫૯	૭	સાબીત	સાબીત
૧૬૦	૯	ગ્રુરુકોણુ	ગુરુકોણુ
૧૬૧	૨	આ. ૨માં ∠	આ. ૨માં ∠ सकर
		< ૨ કો. ખુ.	< ૨ કો. ખુ.
૧૬૮	૩	અષ્ટકોણુ દોરો	અષ્ટકોણુ દોરવા
૧૬૯	૧	मकस = ૯૦°	∠ मकस = ૯૦°
૧૭૦	૭	પચંકોણુ	પંચકોણુ
,,	૧૧	પરિવૃત્ત	પરિગત
૧૭૨	૭	ચતુષ્કોણુ વર્તિક છે	ચતુષ્કોણુ વાર્તિક છે
,,	૧૦	ગ)	(ગ)
,,	૧૩	બિદુ છે	બિંદુ છે
૧૭૪	૮	અને नम ચાપ	અને गनम ચાપ
૧૮૧	૬	લબ પરસ્પર	લંબ પરસ્પર

વૃક્ષની ઉંચાઇ માપવાની રીત.



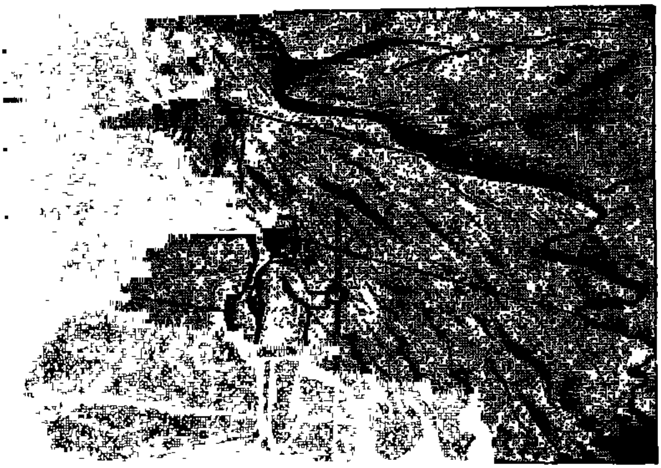
ચિત્રમાં ઉભેલા માણુસ પાસે સમદ્વિભુજ કાટખુણુ ત્રિકોણુ છે. આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે તેની એક બાજુ જમીનની સમાન્તર રાખી કર્ણમાર્ગે દૃષ્ટિ કરી स અને र એક લીટીમાં આવે ત્યાં સુધી દૂર જાય છે. વૃક્ષથી તેનું અંતર માપી તેમાં તેની આંખ સુધીની ઉંચાઇ ઉમેરવાથી વૃક્ષની ઉંચાઇ નીકળે છે.

વૃક્ષ અને વાંસની છાયા માપી, વાંસની લંબાઇ ઉપરથી પણ વૃક્ષની ઉંચાઇ નીકળે છે.

૧૬ મી સદીની માપણીમાં વપરાતું સાધન.

યુરોપમાં એક એવી દંતકથા ચાલે છે કે નેપોલિયનના લશ્કરનો રસ્તો એક નદી રસ્તામાં આવવાથી રોકાયો હતો અને તેની પહોળાઇ જાણુવાની જરૂર હતી ત્યારે તેના ઇજનેરે આ રીતથી

તે નદીની પહેાળાઇ એકદમ કહાડી આપી તેથી તે નેપેાલિયનને ઘણેા માનીતેા બન્યેા.



ચિત્રમાં મથાળે ઉભેલેા ડાબી બાજુનેા માણસ તેની ટેાપીની આગલી ધારથી નદીના સામેના કિનારાની કેાઇ એક વસ્તુ અનુકૂળ કેાણે આવે તેમ તેની ટેાપી રાખી તે તરફ જુએ છે. તે જ માણસ તેની વિરૂદ્ધ દિશામાં ફરી ટેાપીનેા કેાણ કાયમ રાખી કિનારાની જમીન ઉપર પેાતાની દૃષ્ટિ ફેંકે છે. જે વસ્તુ ઉપર તેની દૃષ્ટિ બરાબર પડે છે તે વસ્તુનું કિનારાથી અંતર તે જ નદીની પહેાળાઇ છે

ટેાપી સિવાય માણસ પેાતાનેા હાથ ભ્રમર ઉપર રાખીને બંને બાજુ નજર કરી ઉપર પ્રમાણે પહેાળાઇનેા આશરેા કહાડી શકે.

નીચેનેા માણસ પણ લગભગ તેવી જ રીતે એક લાકડી સાથે બીજી લાકડીનેા ટુકડેા અમુક કેાણે રાખી તેને સ્ક્રુથી મજબુત કરી નદીની પહેાળાઇ માપવા પ્રયત્ન કરે છે.